7 Ottobre 2021

TEOREMA:

Sia $n \in \mathbb{N}$: n non è un quadrato perfetto

Allora:

$$\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$$

DIM.: (esercizio impegnativo!)
(vedi pagina successiva)

Quindi la radice di un numero naturale è "quasi" sempre un numero NON in $\mathbb{Q}$.

DIM.:

È utile il seguente lemma preliminare:

LEMMA: Siano $m, n, l \in \mathbb{N}$ tali che: $M.C.D.(m, l) = 1$

Allora:

se l divide $m \cdot n$

$\Longrightarrow$ l divide n

Prova: Se l divide $m \cdot n$, allora tutti i fattori di l sono anche fattori di $m \cdot n$.

Tuttavia, $M.C.D.(m, l) = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ l e m non hanno fattori in comune

Quindi tutti i fattori di l

devono essere fattori di n, cioè:

ℓ divide n

FINE PROVA DEL LEMMA

Torniamo alla prova del teorema precedente.

Supponiamo che:

$$\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, p, q \in \mathbb{N} :$$

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \qquad \text{dove} \quad M.C.D.(p, q) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad n = \frac{p^2}{q^2}$$

$$n = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 \cdot n = p^2$$

Fattorizziamo p e q:

$$q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$$

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$$

Dato che $M.C.D.(q, p) = 1$, allora p e q non hanno fattori in comune, cioè:

$$q_j \neq p_i \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, t\}$$

Si ha:

$$q^2 = q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \ldots \cdot q_k^2$$

$$p^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_t^2$$

$\Longrightarrow$ q^2 e p^2 non hanno fattori in comune

$\Longrightarrow$ M. C. D. $(q^2, p^2) = 1$

Essendo:

$$q^2 \cdot n = p^2$$

$\Longrightarrow$ p^2 divide $q^2 \cdot n$

Dal lemma:

p^2 divide n

$$\Longrightarrow \quad \exists \ r \in \mathbb{N} :$$

$$n = p^2 \cdot r$$

Sostituendo in $q^2 \cdot n = p^2$

$$q^2 \cdot p^2 \cdot r = p^2$$

$$\Longrightarrow \quad q^2 \cdot r = 1$$

Essendo $q^2, r \in \mathbb{N}$:

$$\Longrightarrow \quad r = 1$$

Pertanto : $n = p^2 \cdot 1 = p^2$

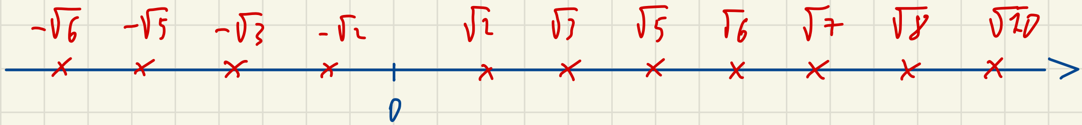
n è un quadrato perfetto !

$\sqrt{2}$,	$\sqrt{3}$,	$\sqrt{4}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{6}$,	$\sqrt{7}$,	$\sqrt{8}$
$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$
$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$

$\sqrt{9}$,	$\sqrt{10}$,	$\sqrt{11}$,	$\sqrt{12}$,
$\mathbb{N}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$
$\mathbb{Q}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$

$\sqrt{13}$,	$\sqrt{14}$,	$\sqrt{15}$,	$\sqrt{16}$,	$\sqrt{17}$,	...
$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$	$\cancel{\mathbb{N}}$	
$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}$	$\cancel{\mathbb{Q}}$	

Quindi la radice di un numero naturale è "quasi" sempre un numero NON in $\mathbb{Q}$.



Perciò se rappresentiamo $\mathbb{Q}$ sulla retta, ci sono infiniti punti della retta che NON corrispondono ad alcun numero razionale.

In realtà si può provare che:

<u>TEOREMA</u>: Siano $p, q \in \mathbb{N}$

e $M.C.D.(p, q) = 1$

Allora:

$\sqrt{\frac{p}{q}} \in \mathbb{Q} \iff$ p e q sono quadrati perfetti

<u>DIM</u>. (Esercizio)

Esempio:

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{2}{5}} \notin \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{23} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{7}{13}} \notin \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$ non è "l'ambiente giusto" in cui lavorare.

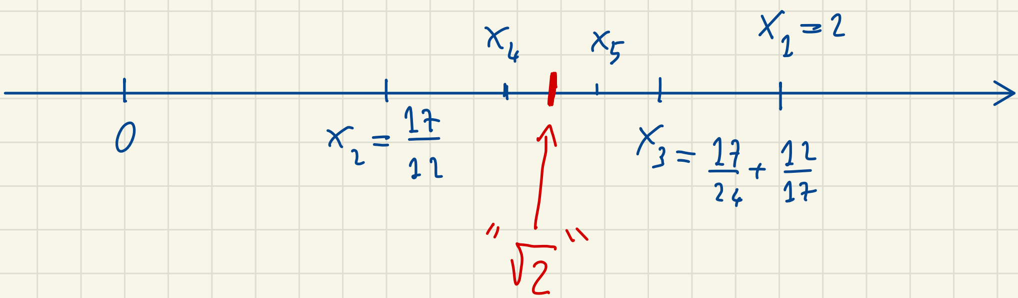
ANALISI MATEMATICA $\longrightarrow$ procedimenti di limite

Esempio:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{x_{n-1}} \\[2ex] x_1 = 2 \end{cases} \implies x_n \in \mathbb{Q}$$

$$2, \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{\substack{\frac{3}{2} \\ \parallel \\ 1,5}}, \quad \underbrace{\frac{\frac{3}{2}}{2} + \frac{2}{3}}_{\substack{\parallel \\ \frac{3}{4}+\frac{2}{3} = \frac{17}{12} \\ \parallel \\ 1,41\overline{7}}}, \quad \underbrace{\frac{17}{24} + \frac{12}{17}}_{\substack{\parallel \\ 1,414215\overline{68}}}, \quad \dots$$

x_2 $\qquad$ x_3 $\qquad$ x_4



$$x_n \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

I NUMERI REALI $\mathbb{R}$:

Idea intuitiva:

" Se posizioniamo tutti i numeri razionali sulla retta e aggiungiamo a $\mathbb{Q}$ tutti i punti rimanenti otteniamo un insieme numerico più grande $\longrightarrow$ i numeri reali $\mathbb{R}$ ".

" I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta (cioè esauriscono tutti i punti della retta) "

" I numeri reali non presentano "" buchi "" (a differenza di $\mathbb{Q}$) e $\mathbb{R}$ è così un insieme continuo "

" La proprietà che possiede $\mathbb{R}$ (e manca a $\mathbb{Q}$) è la continuità. "

PROBLEMA:

Come si formalizza matematicamente la proprietà di continuità in $\mathbb{R}$?

(Non si costruirà $\mathbb{R}$ esplicitam.)

A questo punto vi sono due approcci alternativi:

(I) COSTRUZIONE ESPLICITA dell'insieme dei numeri reali a partire da $\mathbb{Q}$ <u>NO</u>

(II) si assume l'esistenza dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e di formalizzare rigorosamente la proprietà di continuità che tale insieme possiede, a differenza di $\mathbb{Q}$ - SI

CONTINUITÀ DI $\mathbb{R}$:

Per chiarire tale nozione è necessario un certo lavoro preliminare, apparentemente scorrelato dagli argomenti precedenti.

Introduciamo alcune definizioni.

Intervalli di $\mathbb{R}$:

$a, b \in \mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$[b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$$

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

DEF.: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

1. $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se:

$$\forall a \in A: \quad a \leq M$$

Se A ammette un maggiorante A si dice superiormente limitato

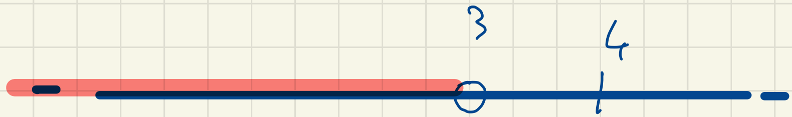
2. $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante di A se:

$$\forall a \in A: \quad m \leq a$$

Se A ammette un minorante A si dice inferiormente limitato

3. Se A ammette un minorante e un maggiorante A si dice limitato

Esempi:



• $A =]-\infty, 3[$

4 è un maggiorante di A

3 " " " " A

A è superiormente limitato

A non ammette minoranti

• $B = \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ non ammette maggioranti

$-\frac{3}{2}$; -1 è un minorante di $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ è inferiormente limitato

• $[1, 2]$ è limitato

DEF.: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

(1) $b \in A$ si dice minimo di A

se $\forall a \in A: \ b \leq a$

(si scrive $b =: \min A$)

(2) $c \in A$ si dice massimo di A

se $\forall a \in A: \ a \leq c$

(si scrive $c =: \max A$)

$\underline{Hp}$: b_1, b_2 min A

$$b_1, b_2 \in A$$

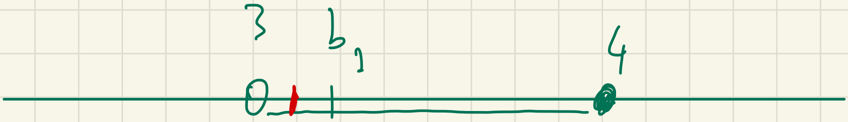
- $b_1 = \min A \leq b_2$
- $b_2 = \min A \leq b_1$

$$b_1 \leq b_2 \ \wedge \ b_2 \leq b_1 \implies b_1 = b_2$$

$]3, 4]$

$$4 = \max A$$

$$\nexists \min A$$



$$b_1 = \min\ ]3, 4]$$

$$\frac{3+b_1}{2} > 3$$

$$\frac{3+b_1}{2} \in\ ]3, 4]$$

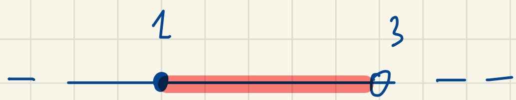
$$\frac{3+b_1}{2} < b_1$$

Oss.:

- il minimo di un insieme A (se esiste) è il più grande dei minoranti di A
- il massimo di un insieme B (se esiste) è il più piccolo dei maggioranti di B.

Esempi:

- $A = [1, 3[$



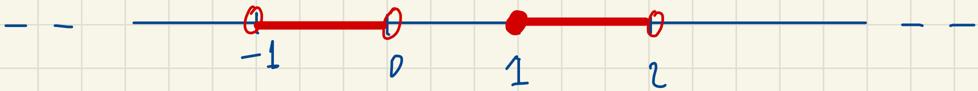
$\min A = 1 \qquad 1 \leq a, \quad \forall a \in A$

$\nexists \max A$

3 è un maggiorante di A

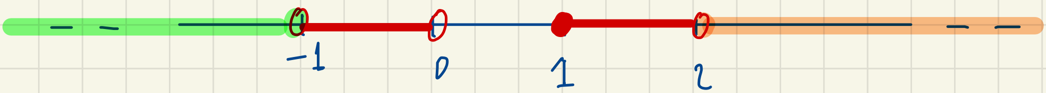
- $B =]1, 3[\qquad \begin{cases} 1 \text{ minorante di } B \\ \nexists \min B \end{cases}$

$$B = \left]-1, 0\right[\cup \left[1, 2\right[$$



minoranti di $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

maggioranti di $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$



$\nexists$ min B

$\nexists$ max B

Esempio:

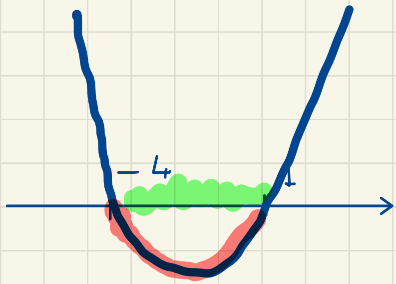
$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \leq 0 \}$$

Mostrare che A è limitato e calcolare gli insiemi

$M_M(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x$ è un maggiorante di $A \}$

$M_m(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x$ è un minorante di $A \}$

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0$$



$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} -4 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

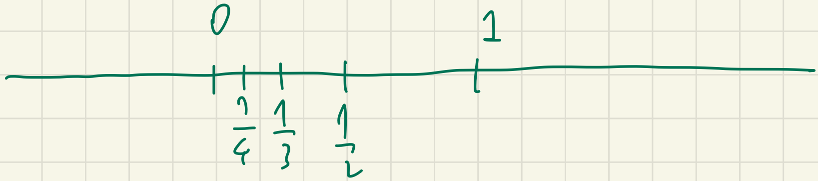
$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1 \}$$

$$M_g(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$$

$$M_n(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \}$$

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0 \right\}$$

$$\frac{1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \ldots$$



0 è un minorante di A

$$\frac{1}{n} > 0$$

$0 \notin A$ $\qquad$ $\nexists \min A$

Esercizio:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0 \}$$

Calcolare gli insiemi:

$$M_M(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un maggiorante di } A \}$$

$$M_m(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un minorante di } A \}$$

Fare lo stesso per:

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x - 5 \geq 0 \}$$

PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$:

$\forall \; \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$:

1. se A è superiormente limitato (cioè: $\mathcal{M}_{\not o}(A) \neq \emptyset$)

$\Longrightarrow \; \exists \; \min \mathcal{M}_{\not o}(A) =: \sup A$

estremo superiore di A

2. se A è inferiormente limitato (cioè: $\mathcal{M}_n(A) \neq \emptyset$)

$\Longrightarrow \; \exists \; \max \mathcal{M}_n(A) =: \inf A$

estremo inferiore di A

DEF. :

Se A non è superiormente limitato, si scrive:

$$\sup A = +\infty$$

Se A non è inferiormente limitato, si scrive:

$$\inf A = -\infty$$

Importante:

La proprietà di completezza non vale in $\mathbb{Q}$ ed è ciò che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$!

Esempio:

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2 \} \cup \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0 \}$$

$$-\sqrt{2} < q < \sqrt{2}$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(A) = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq \sqrt{2} \}$$

$\nexists \min \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(A)$ in $\mathbb{Q}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{dato che} \\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$

Esempi :

$A = \,]-2, 5]$

$Mn(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \}$

$Mg(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \}$

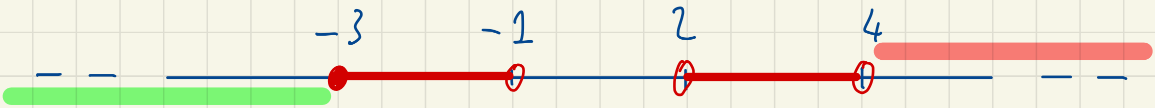
$\inf A = -2$

$\sup A = 5$

$\nexists \min A$

$\max A = 5 = \sup A$

$B = [-3, -1[\; \cup \;]2, 4[$



$M_a(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

$M_n(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

$\sup B = 4$

$\inf B = -3$

$=$

$\min B = -3$

$\nexists \max B$

Oss.:

- se esiste $\max A$ allora
$$\max A = \sup A$$

- se esiste $\min A$ allora
$$\min A = \inf A$$

Esercizi:

Calcolare $M_{\sigma}(A)$, $M_{n}(A)$, $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\min A$ (se esistono) di:

$A = [-2, 6]$ $\qquad$ $A = [2, 9]$

$A =]-\infty, 5]$ $\qquad$ $A =]7, +\infty[$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 6x + 5 < 0\}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4}{x+2} \geq 3 - \frac{x}{x+1} \right\}$$

$\left(\text{Risp.:} \quad A = \left]-2, -\frac{1}{2}\right] \cup \left]1, 2\right] \right)$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4x^4 - 9x^2 + 2 > 0 \right\}$$

$\left\{ \text{Risp.:} \quad A = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[\right\}$

$\inf A = -\infty \quad , \quad \sup A = +\infty$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x^2 - 9x + 7| < 7 \right\}$$

$\left\{ \text{Risp.:} \quad A = \left]0, 2\right[\cup \left]7, 9\right[\right\}$

$\inf A = 0 \quad \sup A = 9 \quad \nexists \min A$

$\max A$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

insiemi numerabili

$$\mathbb{R}$$

("$\mathbb{R}$ si ottiene completando $\mathbb{Q}$ con i punti mancanti sulla retta")

Si prova che $\mathbb{R}$ non è numerabile:

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

(La cardinalità di $\mathbb{N}$ è minore di quella di $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ è un infinito d'ordine superiore rispetto ad $\mathbb{N}$

Per provare che $\mathbb{R}$ non è numerabile, sarà sufficiente mostrare che:

$[0,1[$ non è numerabile

cioè,

$\nexists$ una funzione biunivoca

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

DIM. (Per assurdo)

Supponiamo per assurdo che esista:

$$f: \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{su} [0,1[$$

quindi:

$$f(n) \in [0,1[$$

$$f(0) = 0,\ b_{00}\ b_{01}\ b_{02}\ b_{03}\ b_{04}\ b_{05}\ \ldots$$

$$f(1) = 0,\ b_{10}\ b_{11}\ b_{12}\ b_{13}\ b_{14}\ b_{15}\ \ldots$$

$$f(2) = 0,\ b_{20}\ b_{21}\ b_{22}\ b_{23}\ b_{24}\ b_{25}\ \ldots$$

$$f(3) = 0,\ b_{30}\ b_{31}\ b_{32}\ b_{33}\ b_{34}\ b_{35}\ \ldots$$

$$f(4) = 0,\ b_{40}\ b_{41}\ b_{42}\ b_{43}\ b_{44}\ b_{45}\ \ldots$$

$$\ldots = \ldots$$

$$f(n) = 0,\ b_{n0}\ b_{n1}\ b_{n2}\ b_{n3}\ b_{n4}\ b_{n5}\ \ldots$$

Mostriamo che esiste un numero reale $\alpha \in [0,1[$ t.c.:

$$f(n) \neq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Costruiamo r usando un procedimento diagonale (dovuto al matematico Cantor):

$$r := 0, r_0 \, r_1 \, r_2 \, r_3 \, r_4 \, \dots$$

$$r_j = \begin{cases} 5 & \text{se } b_{jj} \neq 5 \\ 6 & \text{se } b_{jj} = 5 \end{cases} \qquad j \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$

- $r_j \neq b_{jj} \quad \forall j \in \mathbb{N}$
- $r \in [0, 1[$

$$
\begin{array}{lcl}
f(0) & = & 0,\ \boxed{b_{00}}\ b_{01}\ b_{02}\ b_{03}\ b_{04}\ b_{05}\ \ldots \\
f(1) & = & 0,\ b_{10}\ \boxed{b_{11}}\ b_{12}\ b_{13}\ b_{14}\ b_{15}\ \ldots \\
f(2) & = & 0,\ b_{20}\ b_{21}\ \boxed{b_{22}}\ b_{23}\ b_{24}\ b_{25}\ \ldots \\
f(3) & = & 0,\ b_{30}\ b_{31}\ b_{32}\ \boxed{b_{33}}\ b_{34}\ b_{35}\ \ldots \\
f(4) & = & 0,\ b_{40}\ b_{41}\ b_{42}\ b_{43}\ \boxed{b_{44}}\ b_{45}\ \ldots \\
\ldots & = & \ldots \\
 & & \quad\ \ \neq\ \ \ \ \neq\ \ \ \ \neq\ \ \ \ \neq\ \ \ \ \neq \\
r & = & 0,\ r_0\ \ r_1\ \ r_2\ \ r_3\ \ r_4\ \ldots
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \quad r \neq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi $\quad f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1[$

non è suriettiva. ASSURDO!

$$1 = 0,\overline{9}$$

$$2,1 = 2,0\overline{9}$$

Pertanto, $[0,1[$ non è numerabile.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\mathbb{R} \text{ non è numerabile}}$

$\mathbb{R}$ è "molto più grande" di $\mathbb{Q}$!

<u>Oss.</u>: Completando $\mathbb{Q}$ si ottiene un insieme ($\mathbb{R}$) "assai più grande" dell'insieme da cui si è partiti!

Quindi:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

$|\mathbb{R}|$ = cardinalità del continuo

CARATTERIZZAZIONE DI INF e DI SUP:

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

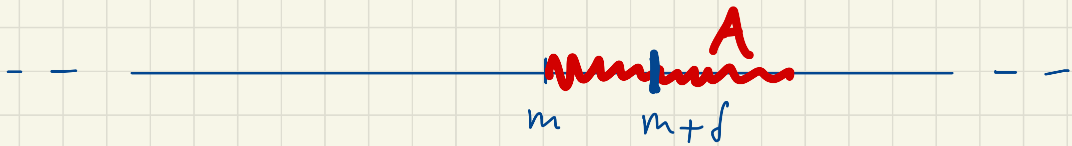
A inferiormente limitato

$m = \inf A$

$\begin{cases} \text{I} & m \text{ è un minorante} \\ \text{II} & m \text{ è il più grande dei minoranti} \end{cases}$

$\forall a \in A: \quad m \leq a$

Come si caratterizza in simboli che "m è il più grande dei minoranti"!



II m è il più grande dei minoranti

$\forall \delta \in \mathbb{R} : \delta > 0$ $\quad m+\delta$ non è un minorante

$\Updownarrow$

$\overline{m+\delta \text{ è un minorante}}$

$= \overline{\forall a \in A : m+\delta \le a} =$

$= \exists a \in A : m+\delta > a$

$(a < m+\delta)$

II $\iff \forall \delta > 0 : \exists a \in A$

$a < m+\delta$

Quindi:

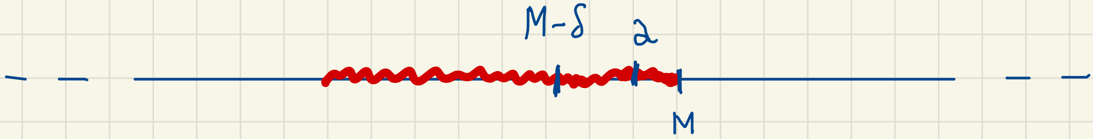
$$\boxed{m = \inf A \iff \begin{cases} \text{I} \ \forall a \in A: \quad m \leq a \\ \text{II} \ \forall \delta > 0: \ \exists a \in A \\ \qquad a < m + \delta \end{cases}}$$

Procediamo in modo analogo per il sup A.

$M = \sup A \longrightarrow$ I M è un maggiorante di A

II M è il più piccolo dei maggioranti di A

I $\forall a \in A: \quad a \leq M$



(II) M è il più piccolo dei maggioranti di A

$\forall \delta > 0$: $M-\delta$ non è un maggiorante di A

$\forall \delta > 0$: $\overline{M-\delta \text{ è un maggiorante di } A}$

$$\overline{\forall a \in A : \quad a \leq M-\delta}$$

$$\exists a \in A : \quad a > M-\delta$$

$$(M-\delta < a)$$

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{I} \quad \forall x \in A: \quad x \leq M \\ \text{II} \quad \forall \delta > 0: \quad \exists x \in A: \\ \qquad\qquad M - \delta < x \end{cases}$$

VALORE ASSOLUTO:

DEF.:

$$a \in \mathbb{R}$$

$$|a| := \max \{ a, -a \}$$

Es.:

$$|7| = \max \{ 7, -7 \} = 7$$

$$|-2| = \max \{ -2, -(-2) \} =$$
$$= \max \{ -2, 2 \} = 2$$

$$|0| = \max \{ 0, -0 \} = \max \{ 0 \} = 0$$

PROPRIETÀ:

① $|a| \geq 0$

(Infatti:

$$|a| = \max\{a, -a\} \begin{cases} \text{se } a \geq 0 \longrightarrow\ = a \geq 0 \\ \text{se } a < 0 \longrightarrow\ = -a > 0 \end{cases}$$
)

② $|-a| = |a|$; $|a| = 0 \iff a = 0$

DIM.: (esercizio)

③ $-|a| \leq a \leq |a|$

DIM.:

$|a| = \max\{a, -a\} \geq a$

$a \leq |a|$

$|a| = \max\{a, -a\} \geq -a$

$-a \leq |a|$

$a \geq -|a|$

④ $|a+b| \leq |a| + |b|$

(disuguaglianza triangolare)

DIM.:

$$\left.\begin{aligned} a &\leq |a| \\ b &\leq |b| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a+b \leq |a|+|b|$$

$$\left.\begin{aligned} a &\geq -|a| \\ b &\geq -|b| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a+b \geq -(|a|+|b|)$$

$$\Downarrow$$

$$-(a+b) \leq |a|+|b|$$

Quindi:

$$|a|+|b| \geq \underbrace{\max\{a+b, -(a+b)\}}_{= |a+b|}$$

⑤ $$\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |a-b|$$

⑥ $$|a| \overset{(<)}{\le} b \iff -b \overset{(<)}{\le} a \overset{(<)}{\le} b$$

$(b \ge 0)$

DIM.:

$$\max\{a, -a\} = |a| \le b$$

e

$$a \le b \qquad\qquad -a \le b$$

$$\downarrow$$

$$a \ge -b$$

$$(b \geq 0)$$

$$⑦ \quad |a| \overset{(>)}{\geq} b \iff a \overset{(<)}{\leq} -b \ \vee \ a \overset{(>)}{\geq} b$$

<u>DIM.</u>:

$$\max\{a, -a\} = |a| \geq b$$

oppure

$$a \geq b \qquad\qquad -a \geq b$$

$$\Updownarrow$$

$$a \leq -b$$

Esercizi:

(1)

$$|x^2 - 9x + 7| < 7$$

equivale a: (intersez. delle soluz.)

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 7 < 7 \\ x^2 - 9x + 7 > -7 \end{cases}$$

(Risp.: $0 < x < 2 \quad \vee \quad 7 < x < 9$)

2

$$\left| \frac{x-3}{x+5} \right| > 2$$

equivale a

$$\frac{x-3}{x+5} < -2 \quad \vee \quad \frac{x-3}{x+5} > 2$$

unione delle soluzioni