30 Settembre 2021

ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO:

Fattoriale di un numero:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Fattoriale di n

Esempi:

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 6 \qquad 4! = 24$

$n! = n \cdot (n-1)!$

DOMANDA:

In quanti modi si possono disporre n elementi? (PERMUTAZIONI)

RISP.: $n!$

Esempio:

$A = \{a, b\}$

a b

b a

2 MODI

$2! = 2$

$B = \{a, b, c\}$

$$\left.\begin{matrix} a\ b\ c & ; & a\ c\ b \\ b\ a\ c & ; & b\ c\ a \\ c\ a\ b & ; & c\ b\ a \end{matrix}\right\} \text{6 MODI}$$

$3! = 6$

COEFFICIENTE BINOMIALE:

$n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \quad : \quad m \leq n$

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \left(1 \quad \text{se} \quad m = 0 \right) \\ \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \end{cases}$$

Dunque:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!} \cdot 1!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot \cancel{3!}} = 10$$

<u>DOMANDA:</u>

Siano $n, m \in \mathbb{N}$: $m \leq n$.

A partire da n elementi, quanti sottoinsiemi di m elementi si possono creare? (COMBINAZIONI)

<u>RISP.:</u> $\binom{n}{m}$

(Si ricordi che in un insieme l'ordine degli elementi è <u>irrilevante</u>)

$n = 3$ $\qquad$ $m = 1$

a, b, c $\qquad$ $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ 3 INS.

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

$n = 4$ $\qquad$ $m = 2$

a, b, c, d

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$

$\{c, d\}$ $\qquad$ 6 $\qquad$ SOTTOINSIEMI

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

PROPRIETÀ: $(K \leq n)$

① $$\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$$

② $$\binom{n}{K-1} + \binom{n}{K} = \binom{n+1}{K}$$

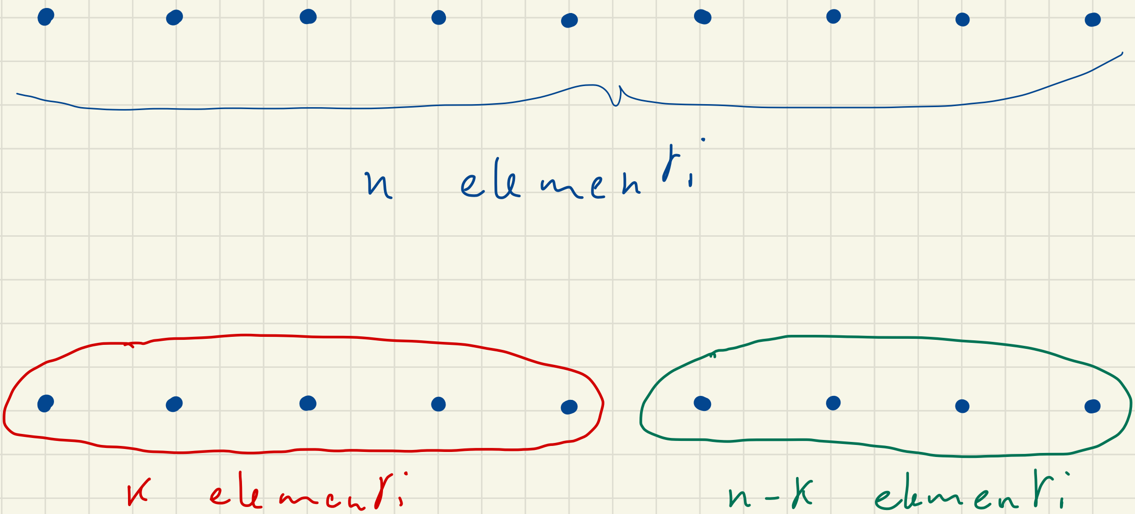
DIM.:

① Tale proprietà afferma un fatto banale:

il numero di sottoinsiemi di K elementi

è uguale al

numero di sottoinsiemi di $n-K$ elementi



Ad ogni sottoinsieme di k elementi corrisponde un sottoinsieme di $n-k$ elementi, per cui il loro numero è uguale!

① Prova algebrica:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Esempio:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!}$$

$$=$$

$$\binom{7}{7-2} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!\cdot 5!}$$

2

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k\cdot(k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1}{(n-k+1)\cdot k} =$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k)!\,(n+1-k)\cdot(k-1)!\cdot k} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\cdot k!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

c. v. d. (2)

Si è così provato che:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Si è così provato che:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

<u>Esempio:</u>

$n = 4 \qquad k = 2$

$$\binom{4}{2-1} + \binom{4}{2} =$$

$$= \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{24}{6} + \frac{24}{4} = 4 + 6 = 10$$

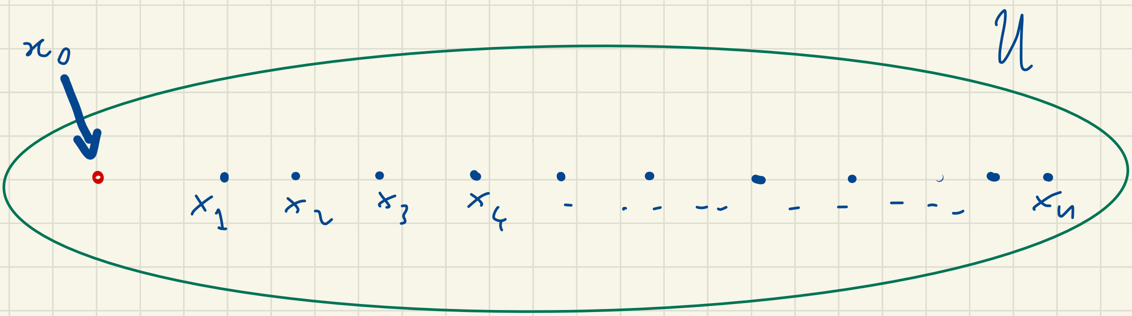
$$\binom{4+1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

PROVA COMBINATORIA:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

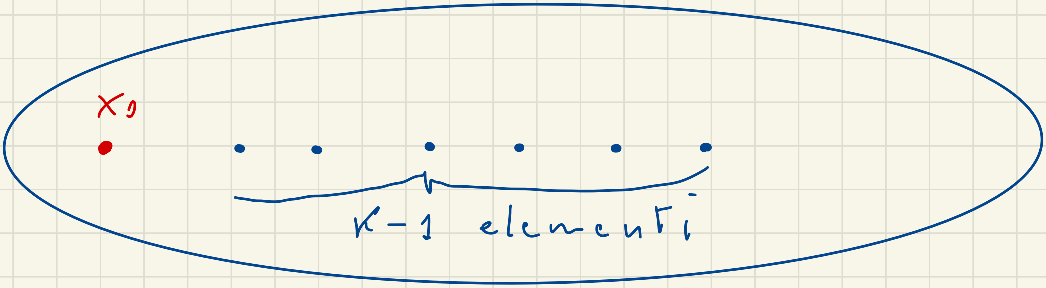
$\downarrow$

numero di sottoinsiemi A di k elementi da un insieme $\mathcal{U}$ di $n+1$ elementi



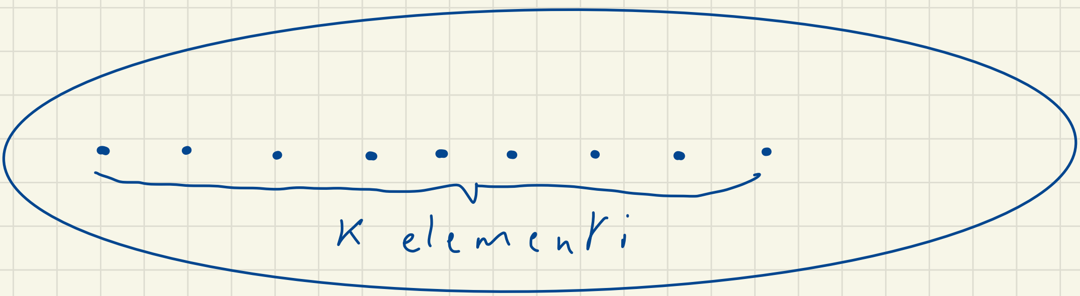
I sottoinsiemi A sono di due tipi:

<u>I tipo</u>: $x_0 \in A$



$\#$ insiemi di I tipo: $\binom{n}{k-1}$

<u>II tipo</u>: $x_0 \notin A$



$\#$ insiemi del II tipo: $\binom{n}{k}$

Donc que :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

IL BINOMIO DI NEWTON

DAL PUNTO DI VISTA COMBINATORIO:

Come si calcola il binomio:

$$(a+b)^n = \ ?$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \ \ldots \ ?$$

Cerchiamo di ottenere la formula generale che esprime $(a+b)^n$ usando l'analisi combinatoria.

$(a+b)^n$ = somma di monomi della forma:

$$m \cdot a^k b^p$$

I PASSO:

Capire come "è fatta" la parte letterale $a^k b^p$.

II PASSO:

Capire come si calcolano i coefficienti m di $a^k b^p$.

I PASSO :

$n = 2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

$$a^2$$

$$a^1 \cdot b^1$$

$$b^2$$

$n = 2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

$$a^2 \cdot b^0 = a^2$$

$$a^1 \cdot b^1$$

$$b^2 = a^0 \cdot b^2$$

$$a^2 \cdot b^0 \quad , \quad a^1 \cdot b^1 \quad , \quad a^0 \cdot b^2$$

Quindi:

$$(a+b)^2 = ?\; a^2 \cdot b^0 + ?\; a^1 \cdot b^1 + ?\; a^0 \cdot b^2$$

$n = 3$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$$a^3 = a^3 \cdot b^0 \qquad a^2 \cdot b^1 \qquad a^1 \cdot b^2 \qquad b^3 = a^0 \cdot b^3$$

$$a^3 \cdot b^0, \quad a^2 \cdot b^1, \quad a^1 \cdot b^2, \quad a^0 \cdot b^3$$

$$(a+b)^3 =$$

$$= \underline{\ ?\ }\ a^3 \cdot b^0 + \underline{\ ?\ }\ a^2 \cdot b^1 + \underline{\ ?\ }\ a^1 \cdot b^2 + \underline{\ ?\ }\ a^0 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

a^4 $\qquad$ $a^3 \cdot b^1$ $\qquad$ $a^2 \cdot b^2$

$\shortparallel$

$a^4 \cdot b^0$

$a^1 \cdot b^3$ $\qquad$ b^4

$\shortparallel$

$a^0 \cdot b^4$

$$(a+b)^4 = \overset{?}{\ldots}\, a^4 b^0 + \overset{?}{\ldots}\, a^3 b^1 + \overset{?}{\ldots}\, a^2 b^2 +$$

$$+ \overset{?}{\ldots}\, a^1 b^3 + \overset{?}{\ldots}\, a^0 b^4$$

In generale:

$$(a+b)^n = \overset{?}{\ldots}\, a^n \cdot b^0 + \overset{?}{\ldots}\, a^{n-1} \cdot b^1 + \overset{?}{\ldots}\, a^{n-2} \cdot b^2 +$$

$$+ \overset{?}{\ldots}\, a^{n-3}\, b^3 + \ldots\ldots + \overset{?}{\ldots}\, a^3\, b^{n-3} +$$

$$+ \overset{?}{\ldots}\, a^2\, b^{n-2} + \overset{?}{\ldots}\, a^1\, b^{n-1} + \overset{?}{\ldots}\, a^0\, b^n$$

<u>Esempio</u>:

$$(a+b)^5 = \overset{?}{\ldots}\, a^5 b^0 + \overset{?}{\ldots}\, a^4 b^1 + \overset{?}{\ldots}\, a^3 b^2 +$$

$$+ \overset{?}{\ldots}\, a^2 b^3 + \overset{?}{\ldots}\, a^1 b^4 + \overset{?}{\ldots}\, a^0 b^5$$

II PASSO:

Determinazione dei coefficienti (?) dei monomi

$$? \cdot a^{n-k} \cdot b^{k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Il coefficiente del monomio $a^{n-k} b^{k}$ rappresenta in quanti modi si può ottenere il suddetto monomio quando si svolge il prodotto

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n\text{-fattori}}$$

Esempi:

$$(a+b)^3 \quad , \quad \overset{?}{\ldots} \; a^1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \underset{\mathrm{I}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{II}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{III}}{(a+b)}$$

il monomio $a^1 \cdot b^2$ si può ottenere solo selezionando a da un unico fattore scelto fra I, II, III (e b dai rimanenti fattori)

L' insieme delle posizioni possibili di a : $\{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{I} & & \mathrm{II} & & \mathrm{III} \\ (a+b)^3 & = & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) \end{array}$$

$\{\mathrm{I}\}$ $a \cdot b^2$

$\{\mathrm{II}\}$ $a \cdot b^2$

$\{\mathrm{III}\}$ $a \cdot b^2$

I modi possibili sono

$$\binom{3}{1} = 3$$

$(a+b)^3$, ?... $a^2 \cdot b^1$

$$\mathrm{I} \qquad \mathrm{II} \qquad \mathrm{III}$$

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)$$

il monomio $a^2 \cdot b^1$ si può ottenere solo selezionando a da $\underline{2}$ diversi fattori scelti fra I, II, III (e b dai rimanenti fattori)

posizioni totali $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$

scelte possibili:

$\{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$, $\{\mathrm{I}, \mathrm{III}\}$, $\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}$

$$\{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \}$$

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ (a+b)^3 = & (a+b)\cdot & (a+b)\cdot & (a+b) \end{array}$$

I, II $\quad a^2 \cdot b \quad$ $\{ \mathrm{I}, \mathrm{II} \}$

I, III $\quad a^2 \cdot b \quad$ $\{ \mathrm{I}, \mathrm{III} \}$

II, III $\quad a^2 \cdot b \quad$ $\{ \mathrm{II}, \mathrm{III} \}$

I modi possibili sono

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$$

$(a+b)^3 \quad , \quad \overset{?}{\ldots} \; a^3 \cdot b^0$

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ (a+b)^3 = & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

il monomio $a^3 \cdot b^0$ si può ottenere solo selezionando a da tutti e tre i fattori I, II, III.

posizioni totali $\{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \}$

scelte possibili: $\{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \}$

$$\mathrm{I} \qquad \mathrm{II} \qquad \mathrm{III}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

I, II, III

$$a^3 = a^3 \cdot b^0$$

I modi possibili $= 1$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$(a+b)^3 \quad , \quad \overset{?}{\ldots} \; a^0 \cdot b^3$

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ (a+b)^3 = & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

il monomio $a^0 \cdot b^3$ si può ottenere solo selezionando b da tutti e tre i fattori I, II, III.

Posizioni totali $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$

Scelte possibili per a:

$$\emptyset$$

$\mathrm{I} \qquad \mathrm{II} \qquad \mathrm{III}$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

$\varnothing$

$$a^0 \cdot b^3$$

I modi possibili = 1

$$\binom{3}{0} = 1$$

In conclusione:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{3} a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{2} a^2 \cdot b^1 +$$

$$+ \binom{3}{1} a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{0} a^0 \cdot b^3$$

Vediamo il caso $(a+b)^4$.

I monomi possibili sono:

a^4, $a^3 b^1$, $a^2 b^2$, $a^1 b^3$, b^4

$$a^4 = a^4 \cdot b^0$$

$$(a+b)^4 = \overset{\mathrm{I}}{(a+b)} \cdot \overset{\mathrm{II}}{(a+b)} \cdot \overset{\mathrm{III}}{(a+b)} \cdot \overset{\mathrm{IV}}{(a+b)}$$

I, II, III, IV

$$a^4 = a^4 \cdot b^0$$

I modi possibili sono

$$\binom{4}{4} = 1$$

$a^3 \cdot b^1$ $\{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV} \}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{I} & & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ (a+b)^4 & = & (a+b) & \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

I, II, III $a^3 \cdot b^1$

I, II, IV $a^3 \cdot b^1$

I, III, IV $a^3 \cdot b^1$

II, III, IV $a^3 \cdot b^1$

I modi possibili sono:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}$

$a^2 \cdot b^2$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathrm{I} & & \mathrm{II} & & \mathrm{III} & & \mathrm{IV} \\ (a+b)^4 & = & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) & \cdot & (a+b) \end{array}$$

I, II $\quad a^2 b^2$

I, III $\quad a^2 b^2$

I, IV $\quad a^2 b^2$

II, III $\quad a^2 b^2$

II, IV $\quad a^2 b^2$

III, IV $\quad a^2 b^2$

I modi possibili sono:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$$

$$a^1 \cdot b^3 \qquad \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ (a+b)^4 = & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \cdot & (a+b) \end{array}$$

I $\quad a^1 b^3$

IV $\quad a^1 \cdot b^3$

II $\quad a^1 b^3$

III $\quad a^1 b^3$

I modi possibili sono:

$$\binom{4}{1} = 4$$

$$b^4 = a^0 \cdot b^4$$

$$(a+b)^4 = \underset{\mathrm{I}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{II}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{III}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{IV}}{(a+b)}$$

$\varnothing$

$$a^0 \cdot b^4$$

I modi sono:

$$\binom{4}{0} = 1$$

Dunque:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{4} a^4 b^0 + \binom{4}{3} a^3 b^1 +$$

$$+ \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{0} a^0 b^4$$

Esercizio:

$$(a+b)^5$$

$$a^5, \quad a^4 b^1, \quad a^3 b^2, \quad a^2 b^3, \quad a^1 b^4, \quad b^5$$

$$(a+b)^5 = \underset{\mathrm{I}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{II}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{III}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{IV}}{(a+b)} \cdot \underset{\mathrm{V}}{(a+b)}$$

$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

$$? \quad a^{n-k}\cdot b^k$$

Il monomio $a^{n-k}\cdot b^k$ può essere realizzato selezionando a da $n-k$ fattori $(a+b)$.

In quanti modi si può fare?

$$\binom{n}{n-k}$$

Quindi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} \cdot b^1 +$$

$$+ \binom{n}{n-2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + $$

$$+ \binom{n}{2} a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{0} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \leftarrow \text{più semplice da scrivere!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Scriviamo ora $(a+b)^n$ al variare di n:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a \cdot b + \binom{2}{2} b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a b^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$$\vdots$$

$$n=1 \qquad \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\binom{1}{0}}} a + \overset{= 1}{\binom{1}{1}} b$$

$$n=2 \qquad \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\binom{2}{0}}} a^2 + \binom{2}{1} ab + \overset{= 1}{\binom{2}{2}} b^2$$

$$n=3 \qquad \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\binom{3}{0}}} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a b^2 + \overset{= 1}{\binom{3}{3}} b^3$$

$$n=4 \qquad \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\binom{4}{0}}} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\binom{4}{4}}} b^4$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Valgono:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

È facile ottenere i coefficienti del binomio $(a+b)^n$:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

- - - - - - - - - - -

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10\, a^3 b^2 + 10\, a^2 b^3 + 5 \cdot a b^4 + 1 \cdot b^5$$

Lo schema:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

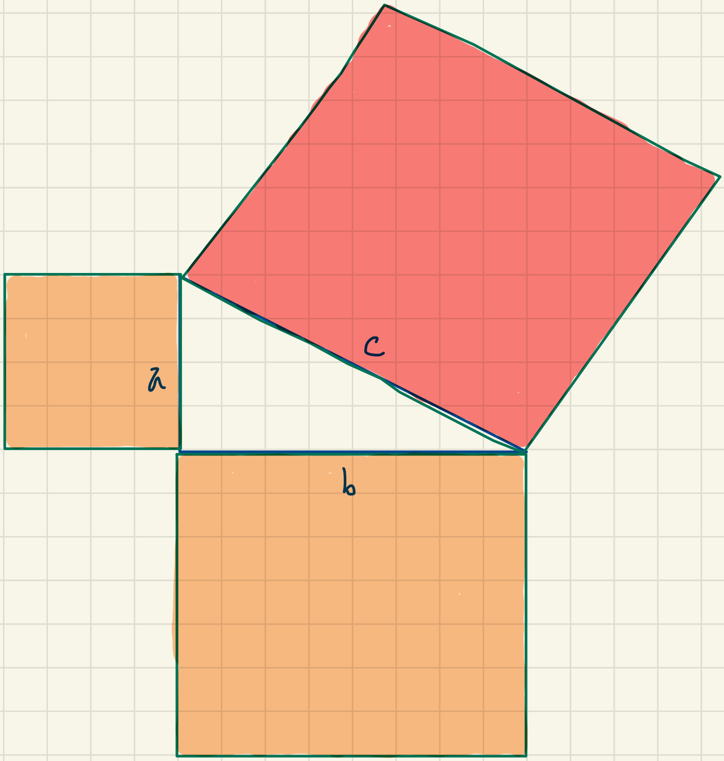
1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

. . . .

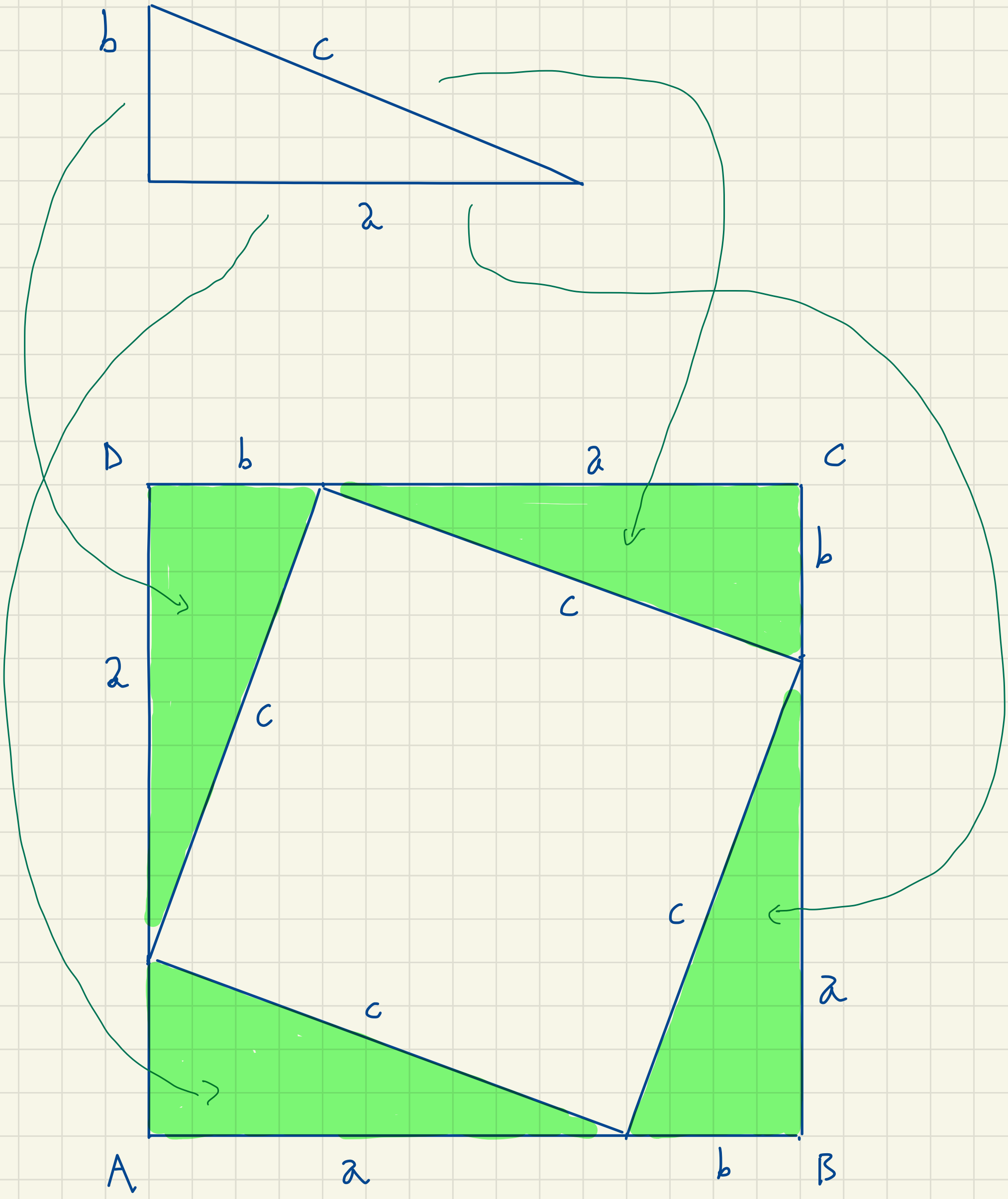
prende storicamente il nome di **TRIANGOLO DI TARTAGLIA**

IL TEOREMA DI PITAGORA:

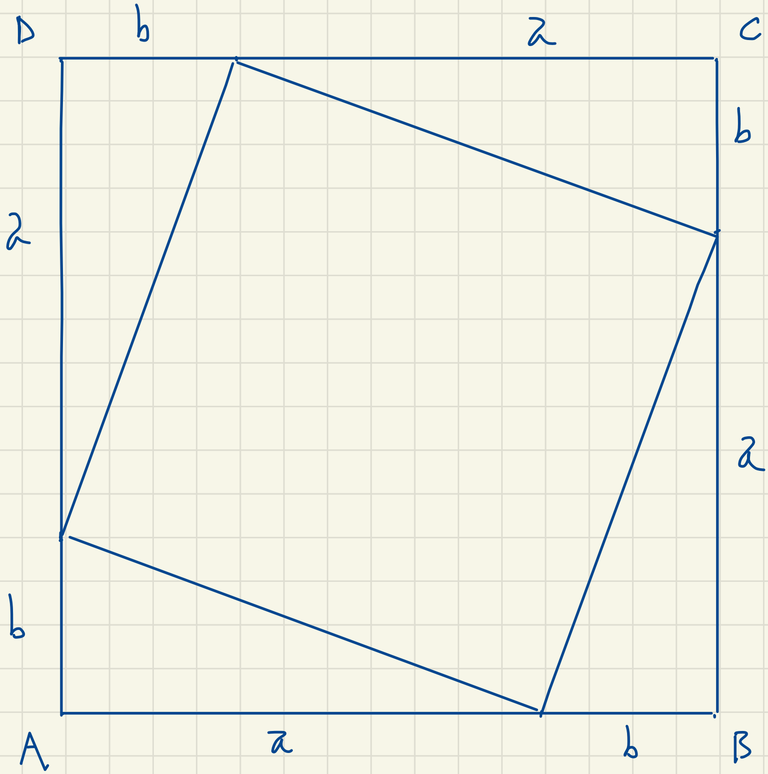


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Perché vale il teorema di Pitagora?

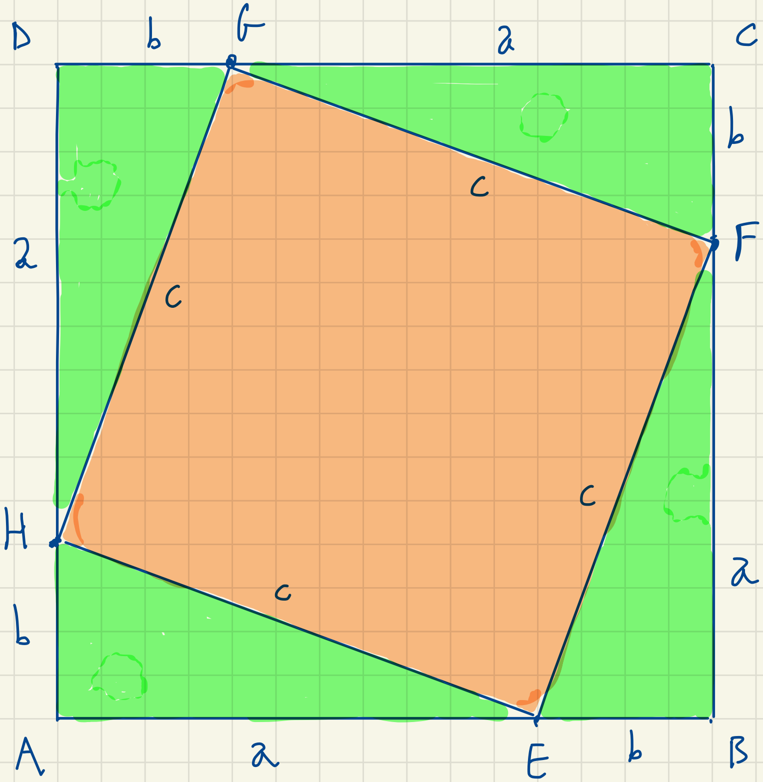


b
c
a
D
b
a
C
b
c
a
c
c
a
c
A
a
b
B



ABCD è un quadrato

$$\text{Area}(ABCD) = (a+b)^2$$

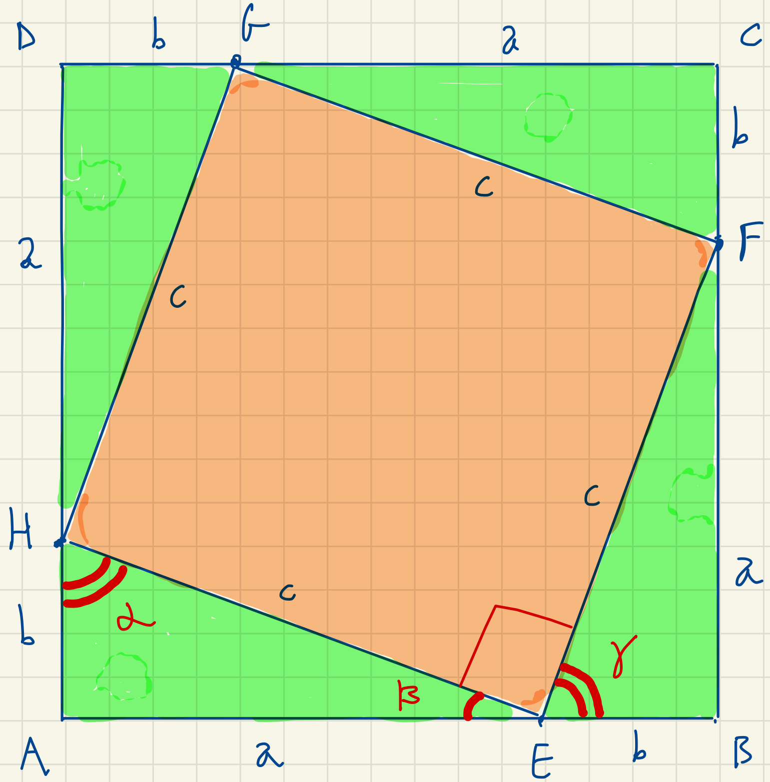


$H\hat{A}E \simeq E\hat{B}F \simeq F\hat{C}G \simeq G\hat{D}H$

sono triangoli rettangoli congr.

$\overline{HE} = c$, $\overline{EF} = c$, $\overline{FG} = c$, $\overline{GH} = c$

$\Rightarrow$ HEFG è un quadrilatero con i lati congruenti



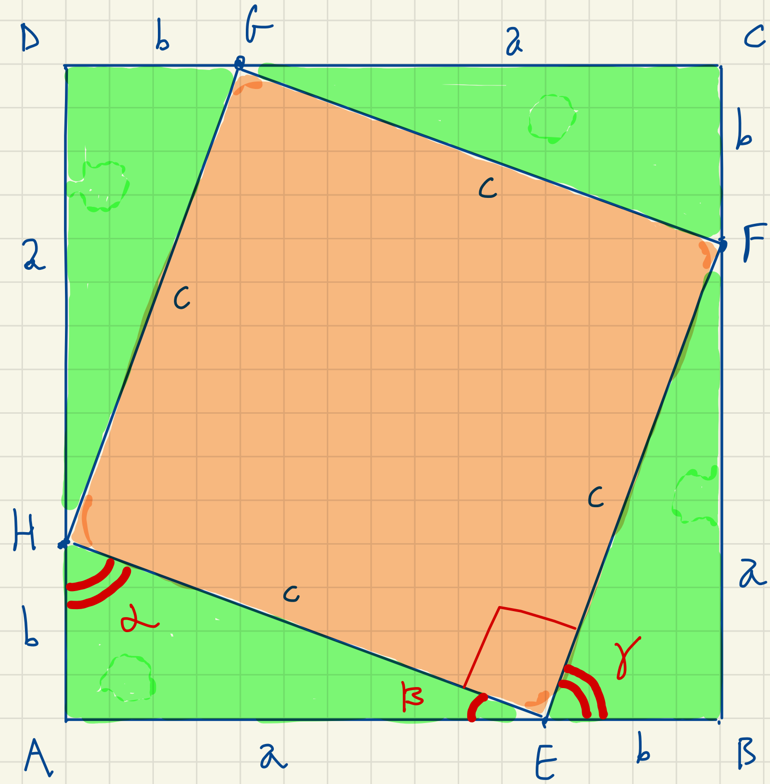
Quanto misura l'angolo $H\hat{E}F$?

Il triangolo $H\overset{\Delta}{A}B$ è rettangolo in $\hat{A} = 90^\circ$

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta + \hat{A} = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$

$\gamma = \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta + \gamma = \beta + \alpha = 90^\circ$



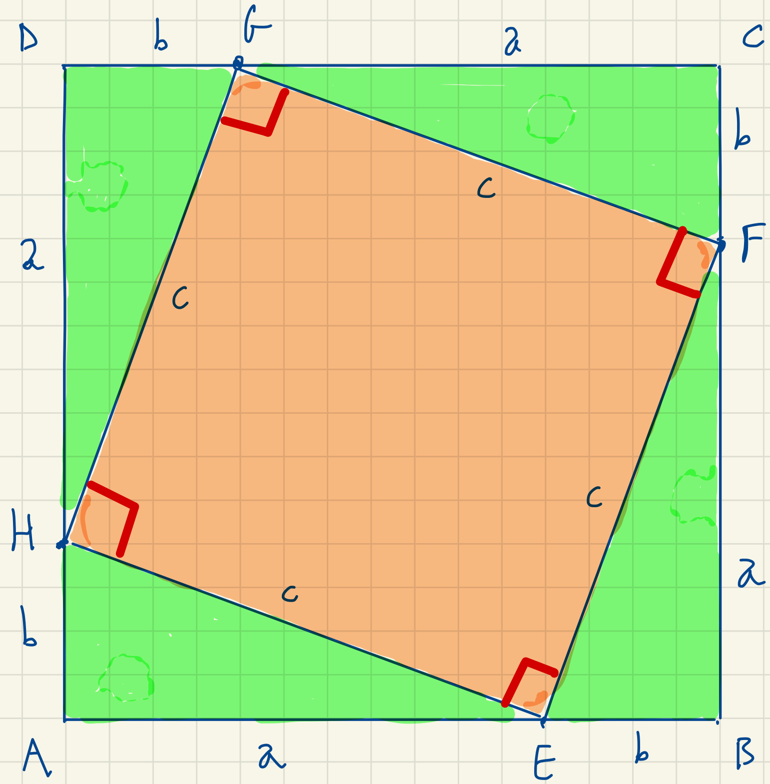
$$\beta + \gamma = 90^\circ \quad , \quad H\hat{E}F = ?$$

$$H\hat{E}F + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad H\hat{E}F = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

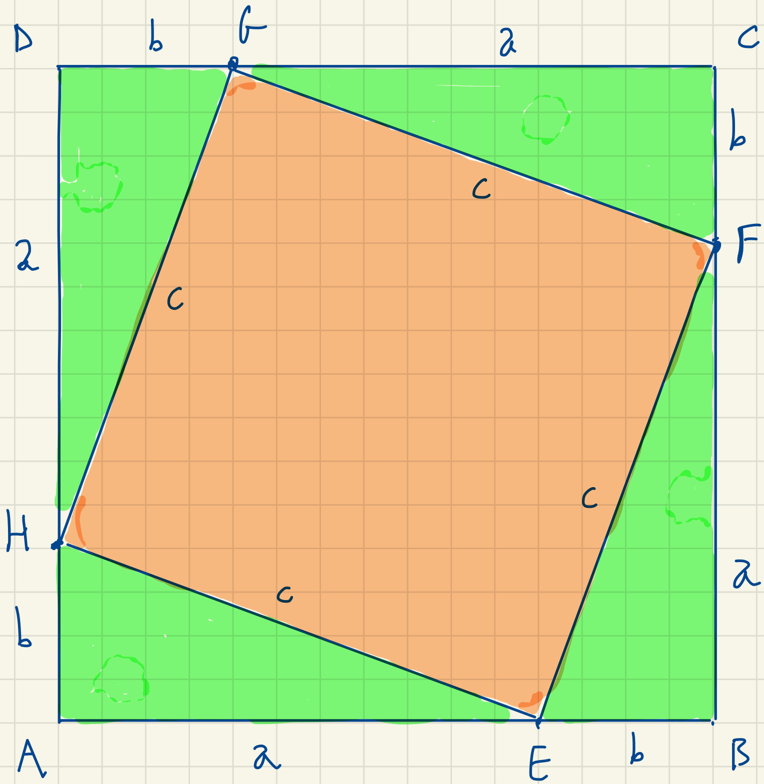
Analogamente:

$$E\hat{F}G = F\hat{G}H = G\hat{H}E = 90^\circ$$



HEFG è un quadrilatero con i lati e gli angoli congruenti

$\Longrightarrow$ HEFG è un quadrato

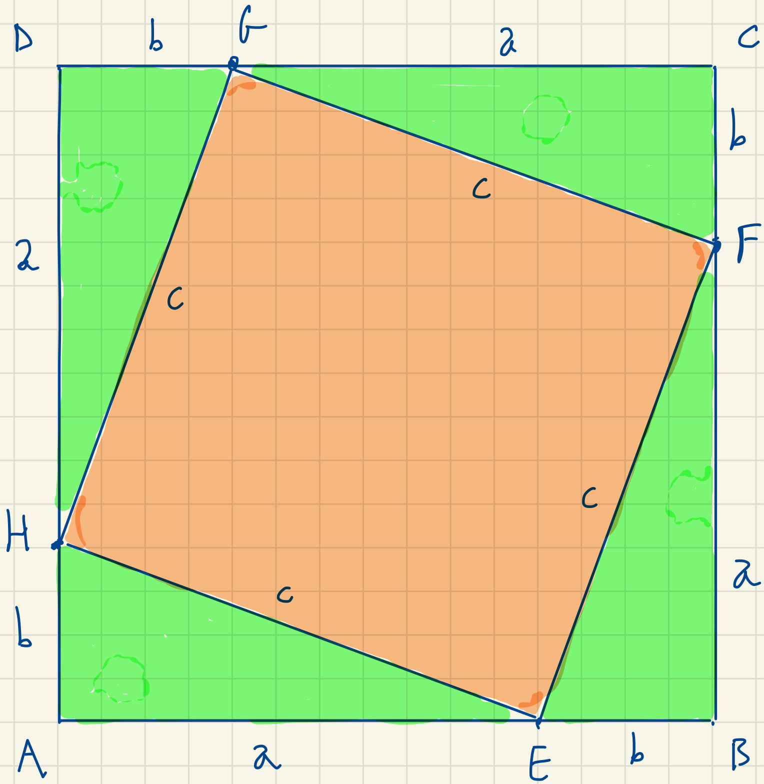


$$\text{Area}(ABCD) = 4 \cdot \text{Area}(H\overset{\Delta}{A}E) +$$

$$+ \text{Area}(HEFG) =$$

$$= 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$$

$$= 2ab + c^2$$



$$\text{Area}(ABCD) = (a+b)^2$$
$$\parallel$$
$$2ab + c^2$$

$$2ab + c^2 = (a+b)^2$$

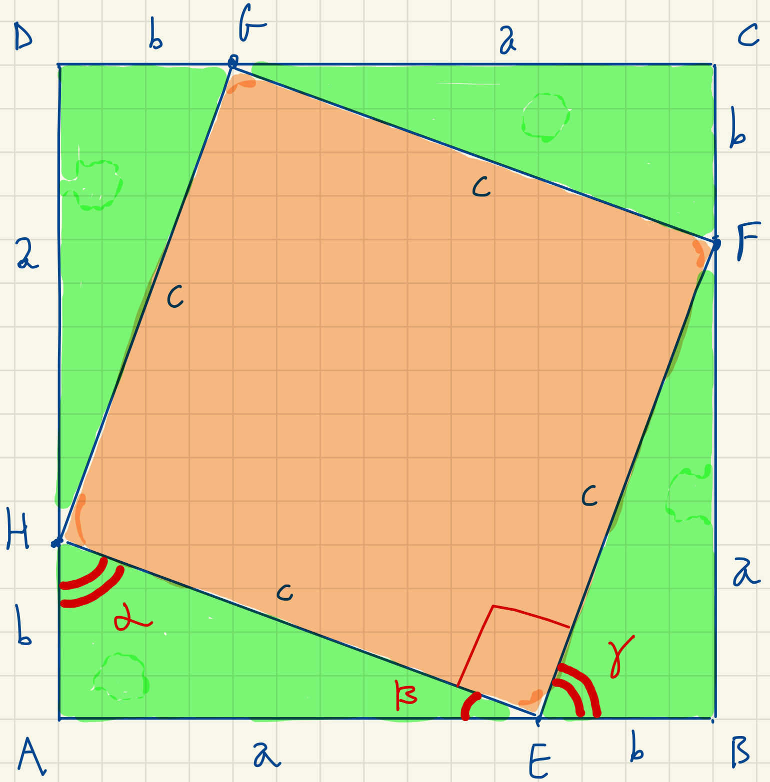
$$\cancel{2ab} + c^2 = a^2 + b^2 + \cancel{2ab}$$

$$\Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$

T. DI PITAGORA

<u>DOMANDA</u>:

Da quale proprietà geometrica dipende la validità del teorema di Pitagora?



$$\alpha + \beta + \hat{A} = 180°$$

La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (180°)

V POSTULATO DI EUCLIDE:

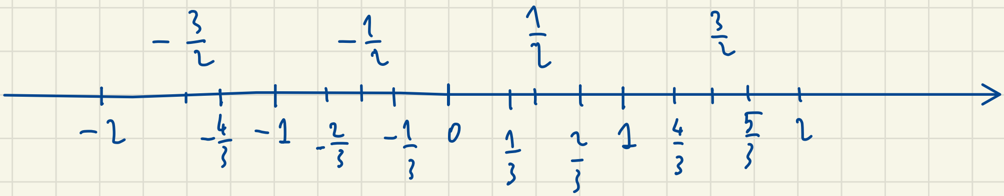
"Per una retta r e un punto P passa una e una sola retta ad essa parallela

$$\Downarrow$$

La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto

Nelle geometrie NON euclidee
non vale il V POSTULATO,
e il teorema di Pitagora è
in generale falso!!

L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$:

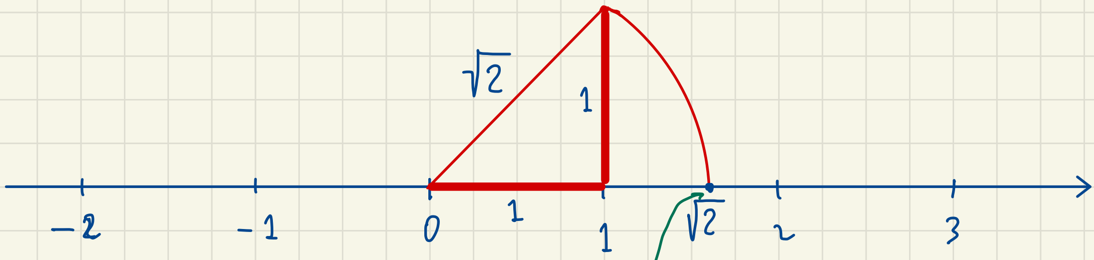


DOMANDA:

Esistono tanti numeri razionali quanti sono i punti della retta?

Equivalentemente, c'è una funzione biunivoca fra $\mathbb{Q}$ e i punti di una retta?

La risposta è NO!



questo punto corrisponde al numero $\sqrt{2}$

<u>DOMANDA</u>:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \; ?$$

TEOREMA: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

DIM. (PER ASSURDO)

Assumiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Dunque: $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Possiamo supporre che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini, cioè:

$$M.C.D.(m, n) = 1$$

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \implies \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\implies m^2 = 2n^2$$

$\implies$ m^2 è pari

(da ciò che si è visto in precedenza)

$\implies$ m è pari

Quindi: $\exists\, m_1 \in \mathbb{N} : \quad m = 2 \cdot m_1$

$$(2 \cdot m_1)^2 = 2 \cdot n^2$$

$$4 \cdot m_1^2 = 2 \cdot n^2$$

$$2 \cdot m_1^2 = n^2$$

$$n^2 = 2 \cdot m_1^2$$

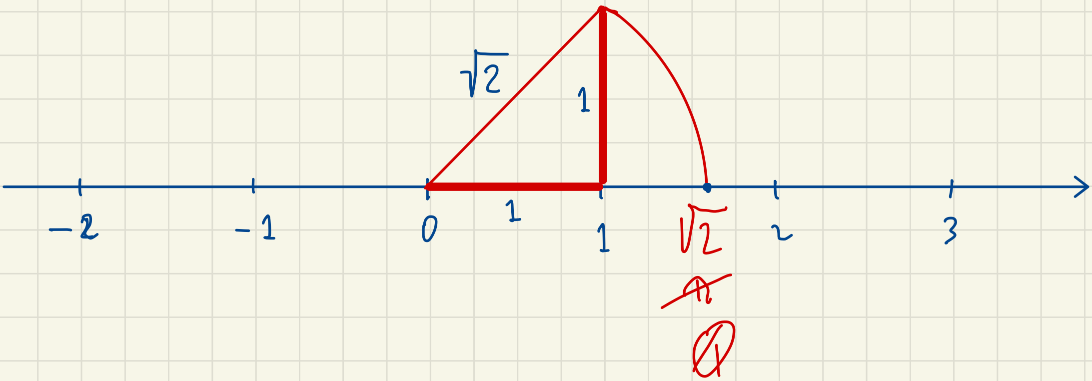
$\Longrightarrow$ n^2 è pari

$\Longrightarrow$ n è pari

Si è così provato che m, n sono pari

$\Longrightarrow$ 2 è un fattore comune di m e n

ASSURDO! $\quad M.C.D.(m,n)=1$



Ci sono altri "punti" che non corrispondono a numeri rationali!

$\sqrt{\ }$

TEOREMA:

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo

$$\Longrightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$$

DIM.:

Si procede in modo del tutto analogo al caso $p=2$ precedente.

Per assurdo:

$$\exists\, m, n \in \mathbb{N}:$$

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$$

$$M.C.D.(m,n) = 1$$

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \implies p = \frac{m^2}{n^2}$$

$$n^2 \cdot p = m^2$$

<u>Oss.</u>: I fattori primi di m^2 sono esattamente tutti e soli i fattori di m.

p è un fattore primo di m^2

$\implies$ p è un fattore di m

. . . . . . (per esercizio)

Quindi:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}, \quad \ldots$$

Quanti sono i numeri primi?

TEOR.: (Euclide)
I numeri primi sono infiniti.

DIM. (PER ASSURDO)

Supponiamo che siano finiti.
Elenchiamoli in ordine crescente:

$$(1<)\, p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \dots < p_n$$

Formiamo il numero:

$$m := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

m produce un'assurdo!
Infatti:

$m > p_n \implies m$ non è primo

poiché p_n è il più grande dei numeri primi

D'altra parte:

m non è divisibile per nessuno dei numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Infatti:

se, ad esempio, m fosse divisibile per p_1, allora:

$\exists\, m' \in \mathbb{N}$:

$$m' \cdot p_1 = m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

$\exists\, m' \in \mathbb{N}:$

$$m' \cdot p_1 = m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

$$\Longrightarrow \quad m' \cdot p_1 - p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1$$

$$p_1 \left(m' - p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \right) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad p_1 = 1 \qquad \text{FALSO !!}$$

Quindi m non è divisibile per p_1 -

Analogamente si prova che
m NON è divisibile per
$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

$\Longrightarrow$ m è primo

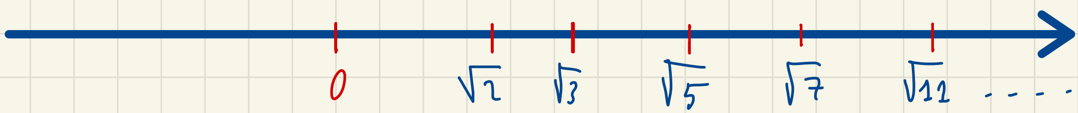
Ma m non può essere
simultaneamente
primo e non primo!

$\Longrightarrow$ I numeri primi
sono infiniti

I numeri primi sono infiniti,

$\Longrightarrow \{ \sqrt{p} \mid p \text{ numero primo} \}$

è infinito e corrisponde a punti sulla retta che non corrispondono a nessun numero razionale



In realtà si può provare molto di più!