# 23 Settembre 2021

$$U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$C(X) = \{4, 5\}$$

$$U_2 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$C(X) = \{5, 6\}$$

$p$ = proposizione

$\overline{p}$ = "non $p$", ossia la negazione di $p$

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Esempio:

$p$ = "lavoro tutti i giorni della settimana"

$\overline{p}$ = "Esiste almeno un giorno della settimana in cui non lavoro"

$p$ = "Ogni elemento di $A$ è un numero pari"

$= \underbrace{\forall a \in A}_{\Updownarrow}$ : $a$ è pari

ogni elemento $a$ di $A$ è tale che $a$ sia pari

$\bar{p} = \exists a \in A : a$ non è pari

ATTENZIONE:

$\overline{\forall} = \exists$

$\overline{\exists} = \forall$

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $p \longrightarrow q$ | $\overline{q} \longrightarrow \overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

DIMOSTRAZIONE DIRETTA

DIMOSTRAZIONE PER NEGAZIONE (contronominale)

le implicazioni $p \longrightarrow q$ e $\overline{q} \longrightarrow \overline{p}$ hanno gli stessi valori di verità, quindi sono equivalenti

<u>Esempio:</u> $n \in \mathbb{N}$

$p =$ " $n^2$ è pari "

$q =$ " $n$ è pari "

$p \longrightarrow q =$ " se $n^2$ è pari allora $n$ è pari "

è equivalente a

$\bar{q} \longrightarrow \bar{p} =$ " se $n$ non è pari allora $n^2$ non è pari " $=$

$=$ " se $n$ è dispari allora $n^2$ è dispari "

Dimostriamo l'implicazione:

"se $n$ è dispari allora
$n^2$ è dispari"

DIM.:

$n$ dispari $\Longrightarrow$ $\exists K \in \mathbb{N}:$
$n = 2K+1$

$$n^2 = (2K+1)^2 = 4K^2 + 4K + 1 =$$
$$= 2(2K^2 + 2K) + 1$$

$\Longrightarrow$ $n^2$ è dispari FINE PROVA

Quindi abbiamo anche provato che:

"se $n^2$ è pari allora
$n$ è pari"

$p \longleftrightarrow q$ = " $p$ coimplica $q$ "

" $p$ se e solo se $q$ "

significa che:

$$p \longrightarrow q \;\wedge\; q \longrightarrow p$$

ossia, le proposizioni $p$ e $q$ sono logicamente equivalenti

Per i nostri scopi useremo indifferentemente i simboli:

$\longrightarrow$ , $\Longrightarrow$

$\longleftrightarrow$ , $\Longleftrightarrow$

$A, B$ insiemi

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

PRODOTTO CARTESIANO

$(a, b)$ coppia ordinata

( NOTA: $(a, b) = (c, d)$ se e solo

se $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ )

Quindi, in generale: (se $A \neq B$)

$$(a, b) \neq (b, a)$$

e perciò:

$$A \times B \neq B \times A$$

Ejemplo:

1

$$A = \{0, 1\} \qquad B = \{-1, 0\}$$

$$A \times B = \{(0,-1), (0,0), (1,-1), (1,0)\}$$

$$\neq$$

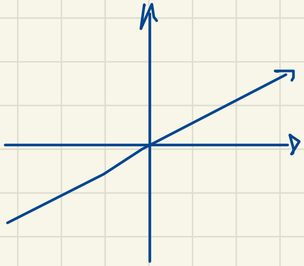
$$B \times A = \{(-1,0), (-1,1), (0,0), (0,1)\}$$

2

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$



- **Funzioni**: (corrispondenza, mappa)

$$f : A \longrightarrow B$$

Dominio di $f$ Codominio di $f$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

legge di associazione

$$\forall x \in A, \ \exists!\, b \in B : \ f(x) = b$$

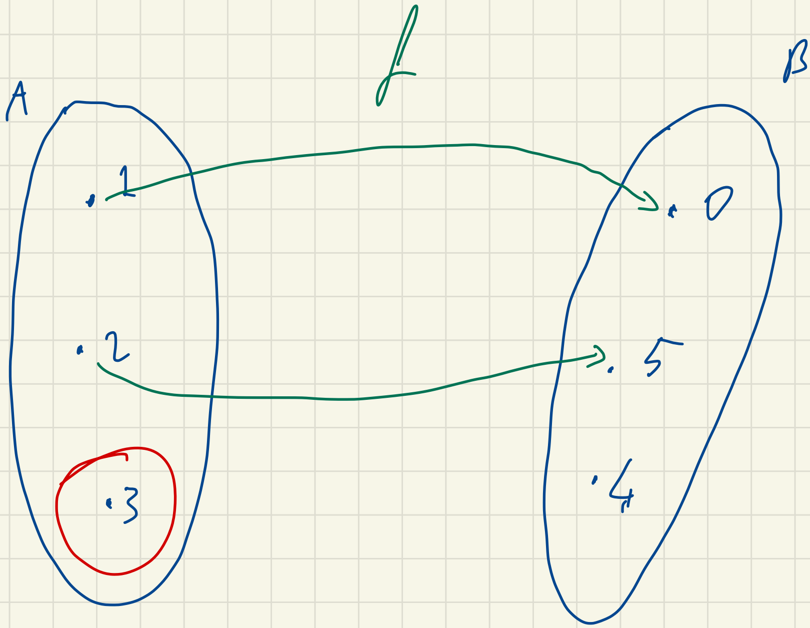
**Esempio:**

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(a) = b$$

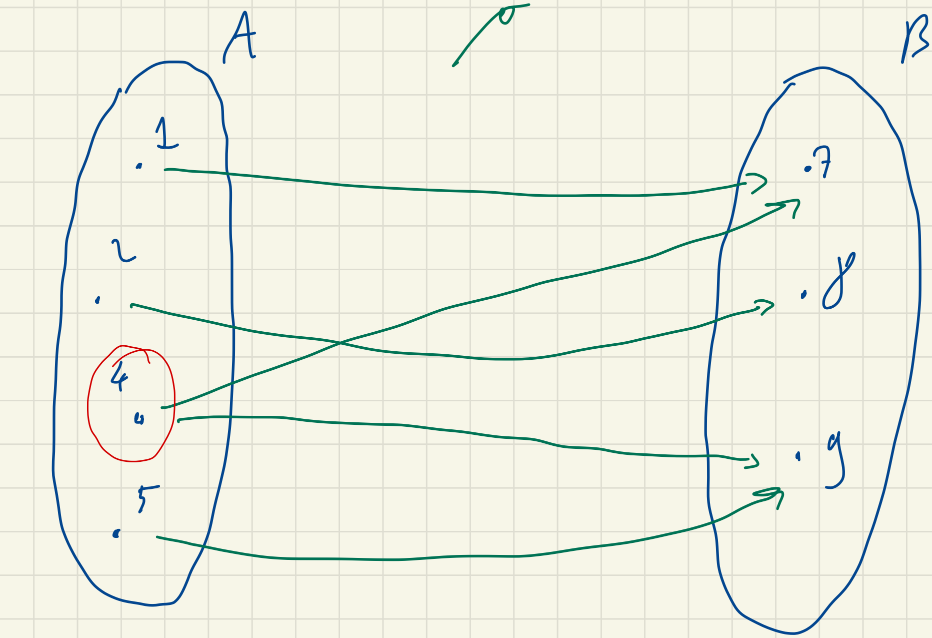
"$b$ è immagine di $a$ tramite $f$"




$(A, B, f)$ è una funzione? NO

$\cancel{\forall} x \in A, \ \exists! \, b \in B : \quad f(x) = b$

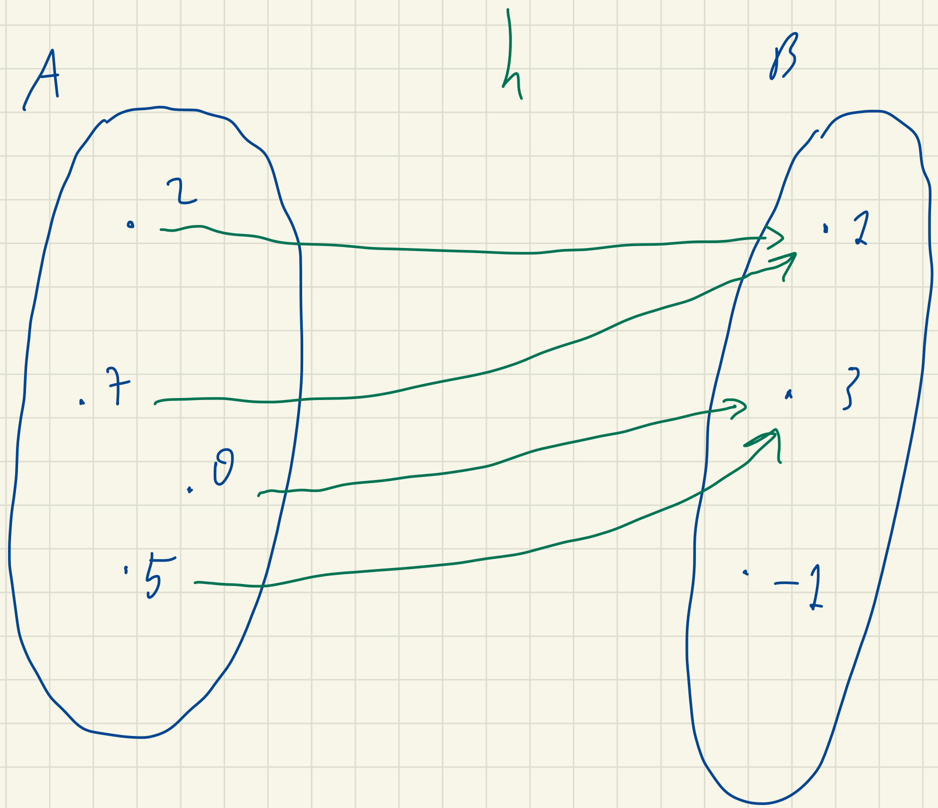
$f(3) = ?$




$(A, B, f)$ è una funzione? **NO**

$$\forall x \in A, \ \cancel{\exists !}\ b \in B : f(x) = b$$

$$f(4) = \begin{cases} 7 \\ 9 \end{cases}$$




$(A, B, h)$ è una funzione! $\sqrt{T}$

$\forall x \in A, \ \exists!\, b \in B : \ h(x) = b$

Due funzioni $f : A \to B$ , $g : A' \to B'$

sono uguali se e solo se :

$$\begin{cases} A' = A \\ B' = B \\ f = g \end{cases}$$

Es.:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, & \mathbb{R}, & f) \\ & \| & \| \\ & \neq & \neq \\ & \| & \| \\ (\mathbb{R}, & \mathbb{R}_+, & g) \end{array}$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$g(x) = x^2$

$\Rightarrow$ $f$ e $g$ sono funzioni diverse

• $f: A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva (1-1)**

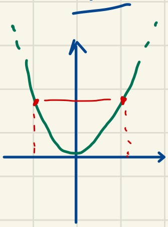
se: $\forall\, a, a' \in A$:

$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

(o, equivalentemente

$$f(a) = f(a') \implies a = a' \; )$$

Es.:



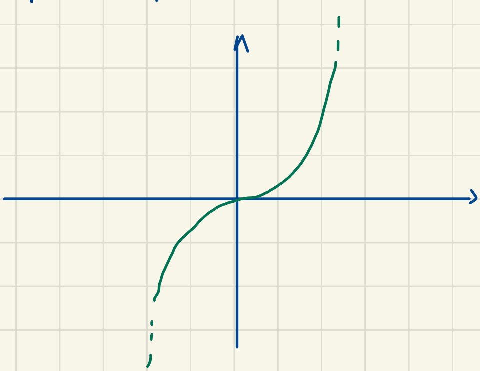
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

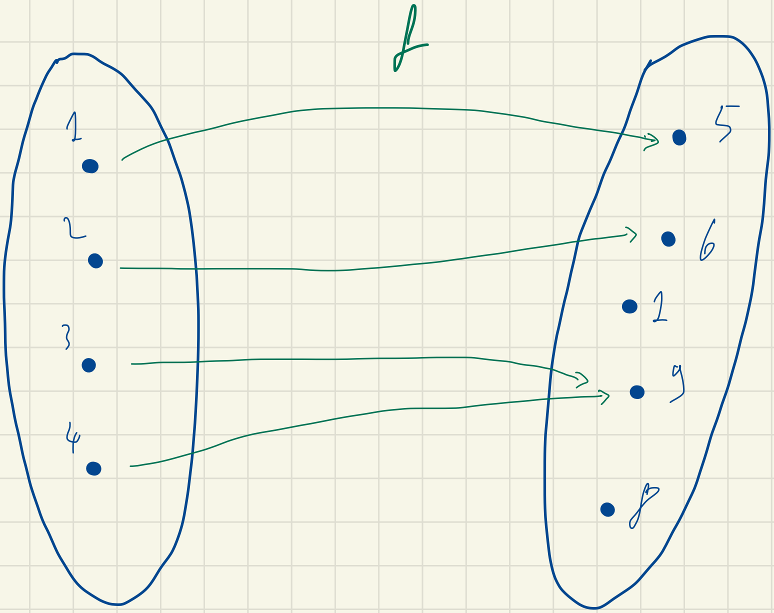
$f(x) = x^2$ NON è 1-1

$$\big( \; f(-1) = 1 = f(1) \; \big)$$

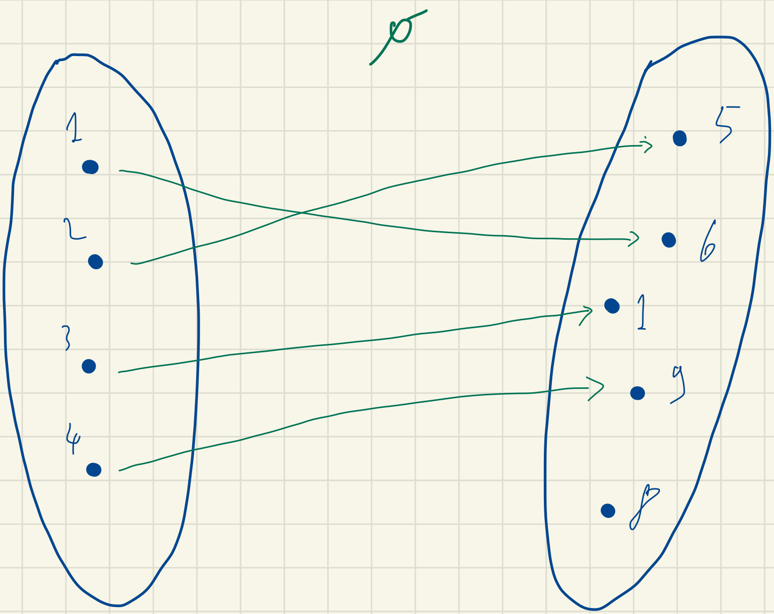
$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = x^3$ è 1-1






Won $\bar{e}$ 1 - 1




$\bar{E}$ 1 - 1

L' iniettività di $f$ dipende strettamente da come "viene scelto" il suo dominio:

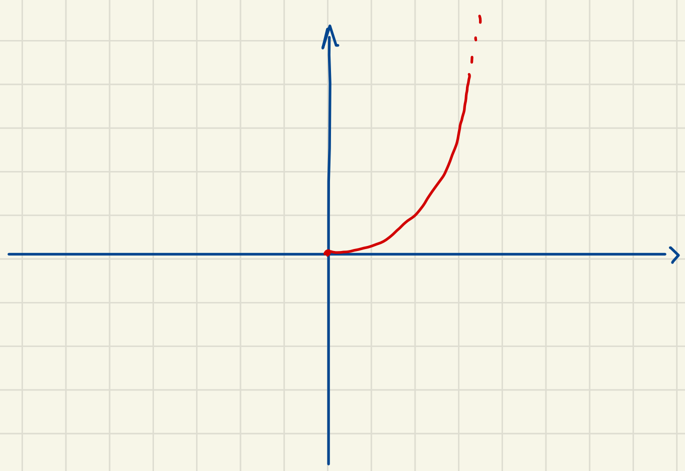
Es:

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

non è 1-1

$$f_2 : \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

è 1-1



• $f : A \to B$ è suriettiva (su)

se $\forall b \in B, \ \exists a \in A : f(a) = b$.

Esempi:

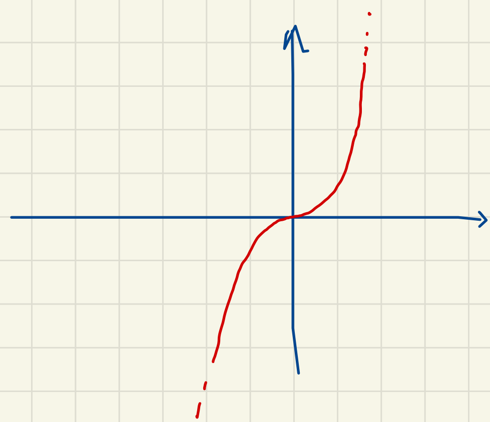
① $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

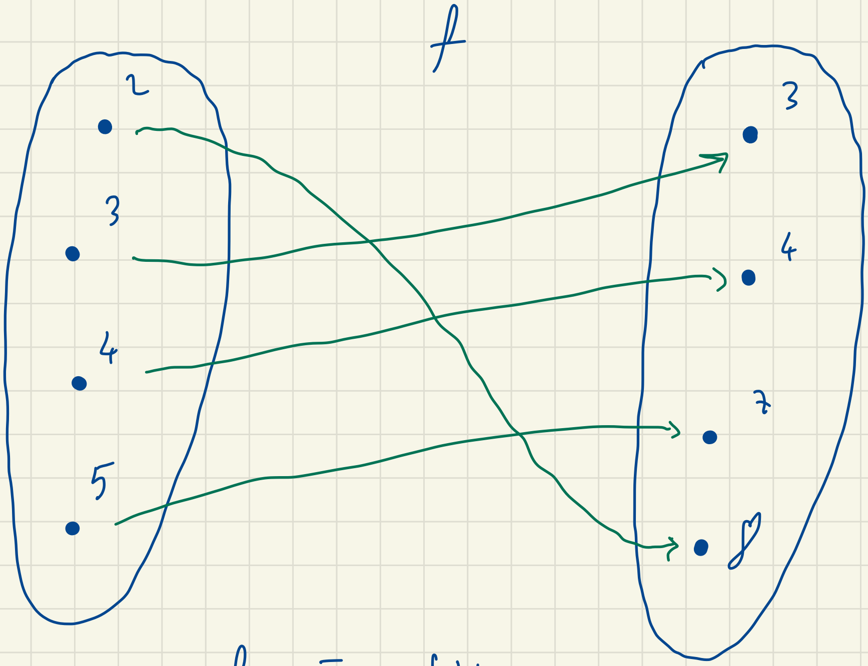
$f$ non è su, infatti $x^2 \geq 0 \ \forall x$

ad esempio $x^2 = -2$ è IMPOSSIB.

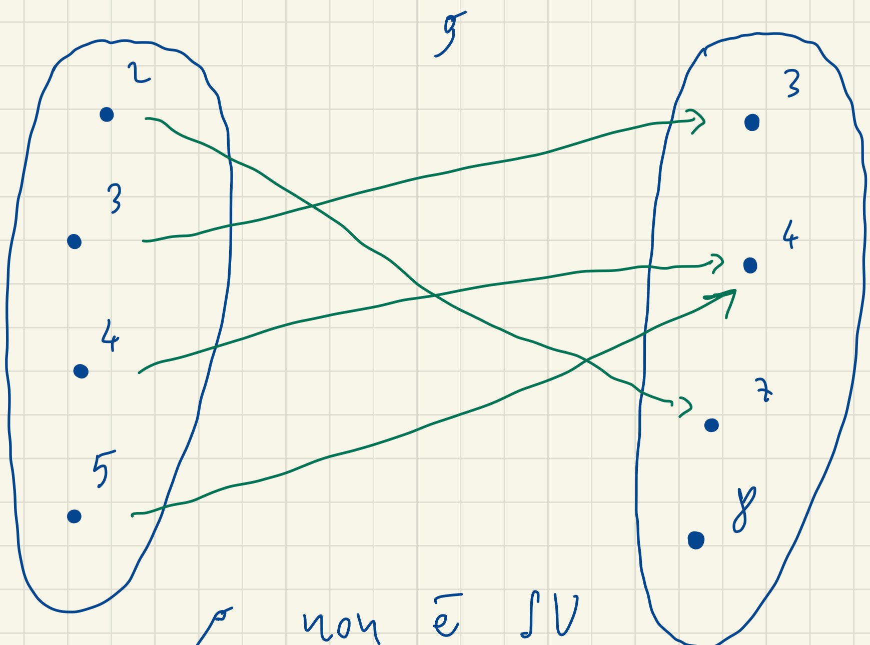
② $$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

$g$ è su






f è SV

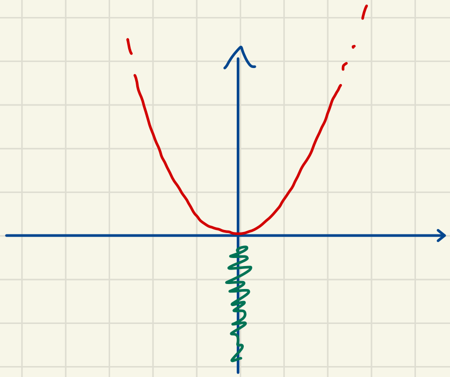



g non è SV

La nozione di SURIETTIVITÀ dipende strettamente dal codominio B.

① $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

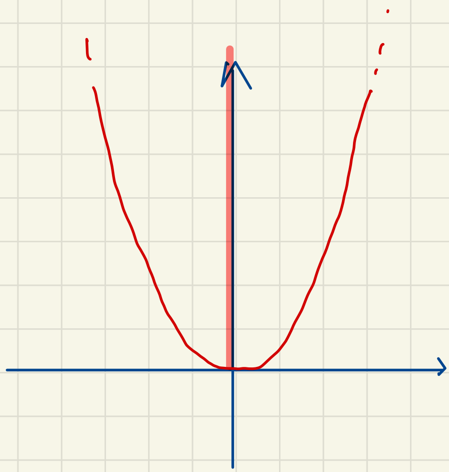
$x \longmapsto x^2$



$f$ non è SU

② $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto x^2$



$h$ è SU.

$$f : A \longrightarrow B$$

$$\mathrm{Im}\, f = \{ b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b \}$$

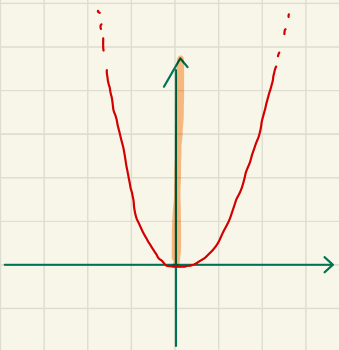
Immagine di $f$

$$\mathrm{Im}\, f \subseteq B$$

$f$ è SURIETTIVA $\iff \mathrm{Im}\, f = B$

<u>Esempio</u>:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$



$$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$$

codominio di $g$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

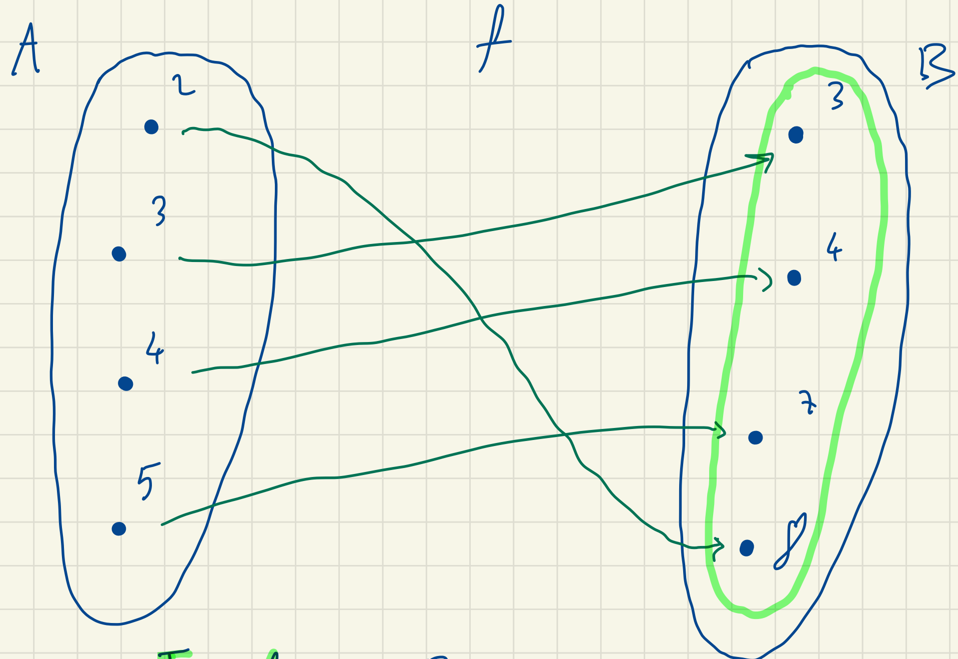
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$$

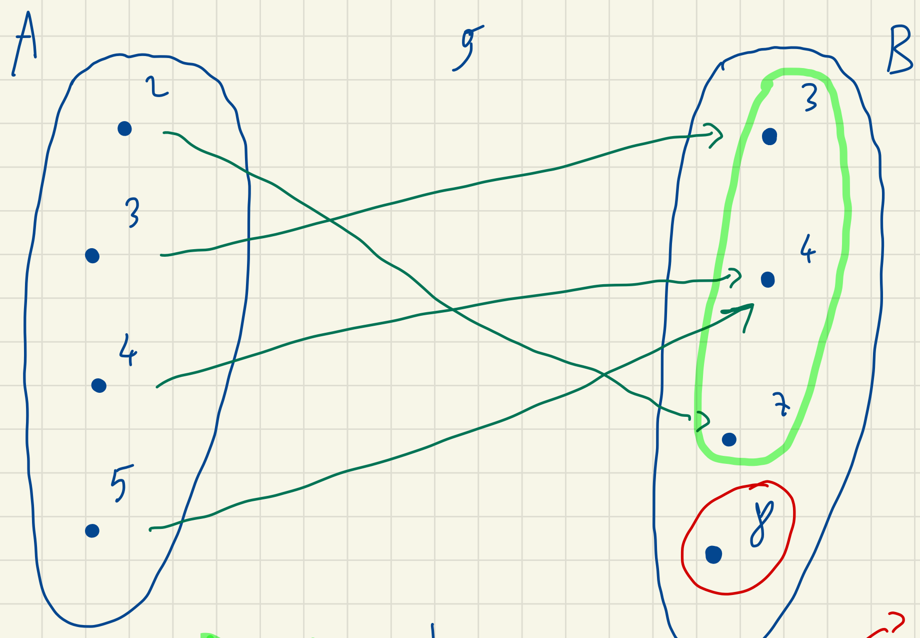
$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \wedge x \neq 1 \}$$

$$f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$




$\mathrm{Im}\, f = B \longrightarrow f$ è su




$\mathrm{Im}\, f = \{3, 4, 7\} \subseteq B$, $\neq$ $\longrightarrow$ g NON è su

$A$, $B$ insiemi

$A \subsetneqq B$ significa $\begin{cases} A \subseteq B \\ A \neq B \end{cases}$

( $=$ "uguale"

$\neq$ "diverso"

$5 = 5$

$7 \neq 5$ )

$\subsetneqq$ = "inclusione stretta"

$f : A \longrightarrow B$ funzione

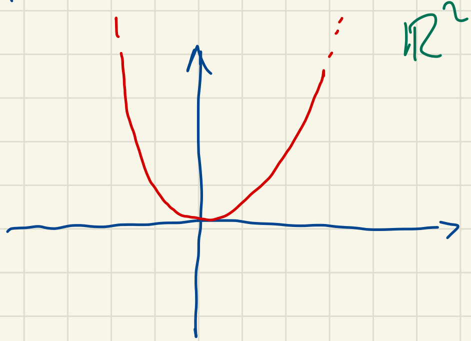
$$G_f = \{ (a,b) \in A \times B \mid f(a) = b \}$$

Grafico di $f$

$$G_f \subseteq A \times B$$

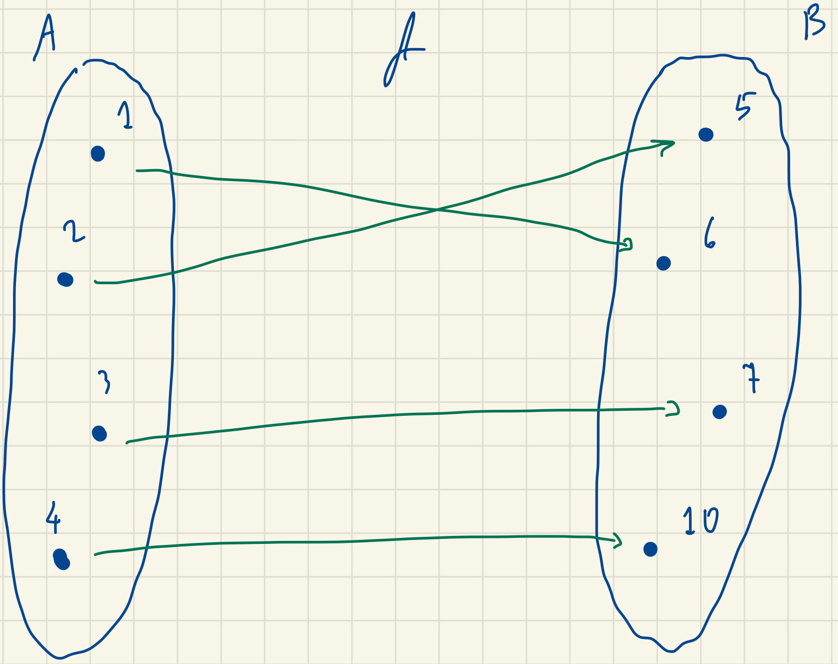
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$$G_f = \{ (x,y) \in \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2} \mid y = x^2 \}$$
$$= \{ (x, x^2) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^2} \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2}$$



- Una funzione $f : A \to B$ si dice **BIUNIVOCA** (o **BIETTIVA**) se $f$ è 1-1 e SU

Esempio:



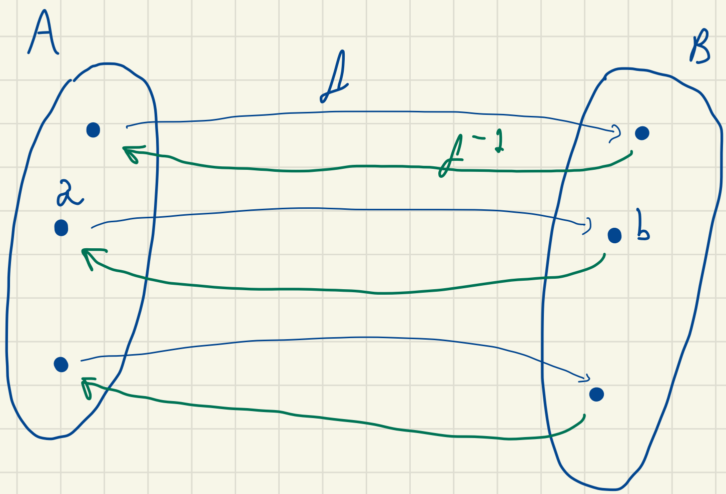
**DEF.**: (funzione invertibile)

$f: A \to B$ si dice invertibile

se $\exists$ funzione $f^{-1}: B \to A$ tale che:

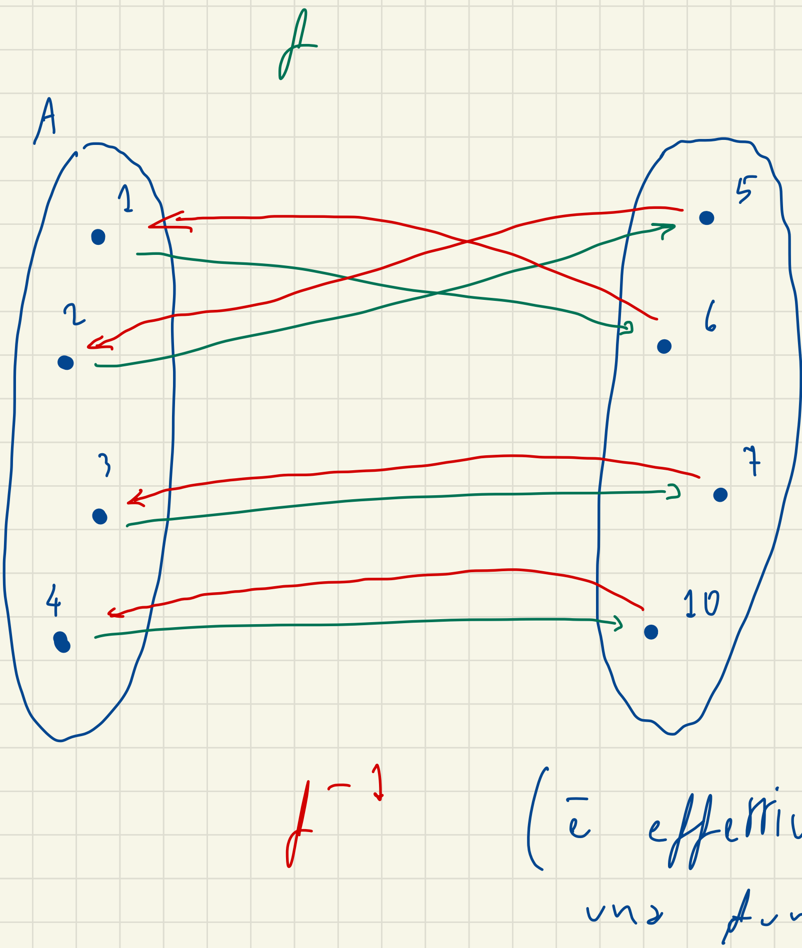
$$\forall a \in A: \quad f^{-1}(f(a)) = a$$

$$\forall b \in B: \quad f(f^{-1}(b)) = b$$

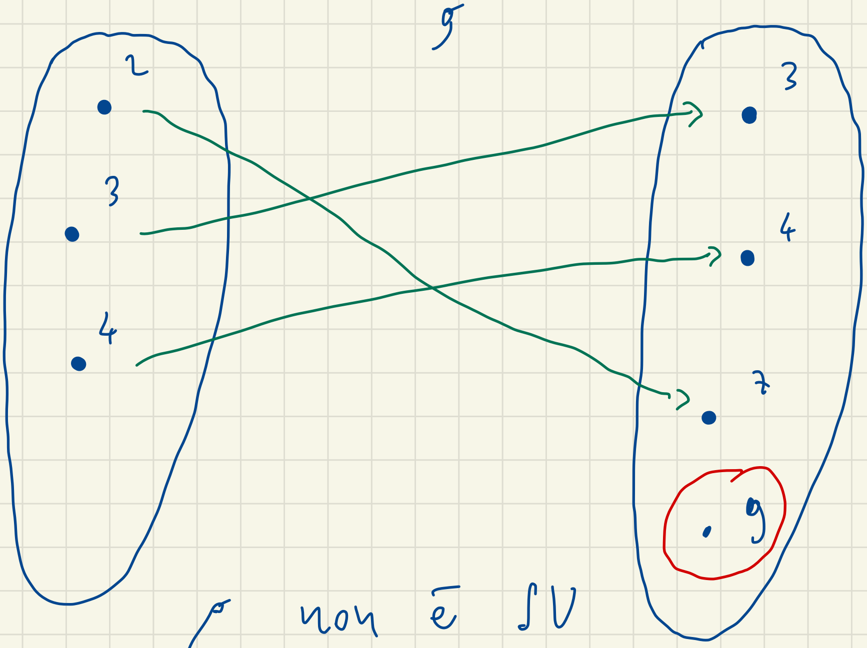


OSSERVAZIONE:

$f$ è invertibile $\iff$ $f$ è biunivoca



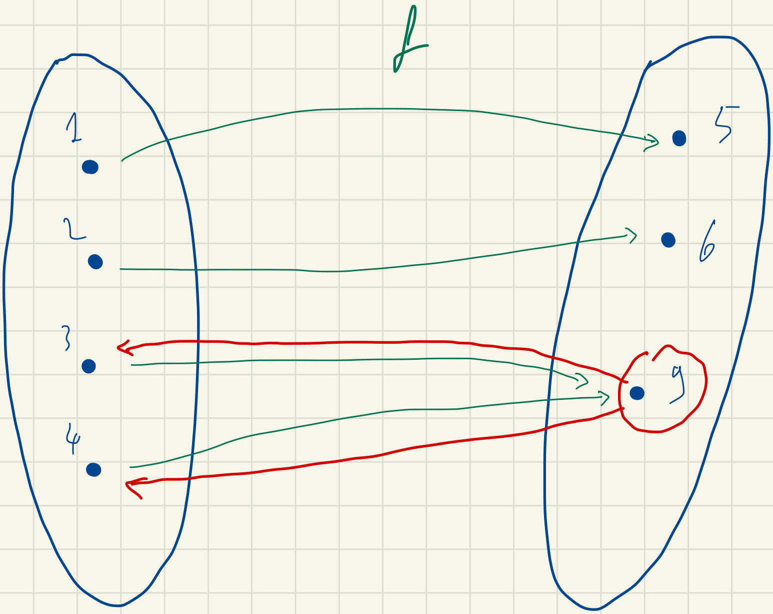

(è effettivamente una funzione)




$f$ non è SU

$f$ non è INVERTIBILE

( "l'inversa non sarebbe una funzione" )




$f$ non è 1-1

$f$ non è INVERTIBILE

("l'inversa non sarebbe una funzione")

# BREVE INTRODUZIONE ALLA CARDINALITÀ:

## DEFINIZIONE:

- $f: A \to B$ biunivoca

In tal caso:

$A$ e $B$ si dicono equipotenti

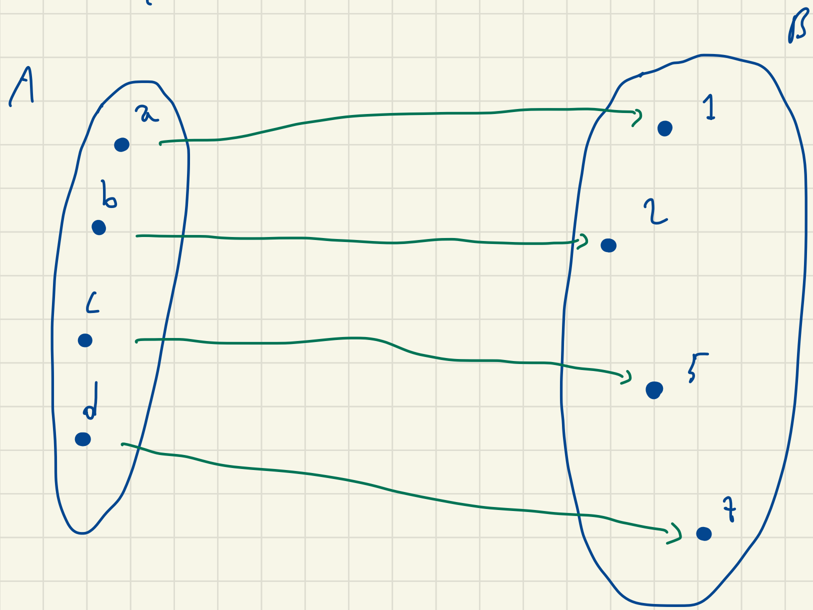
Se $A$ e $B$ sono finiti:

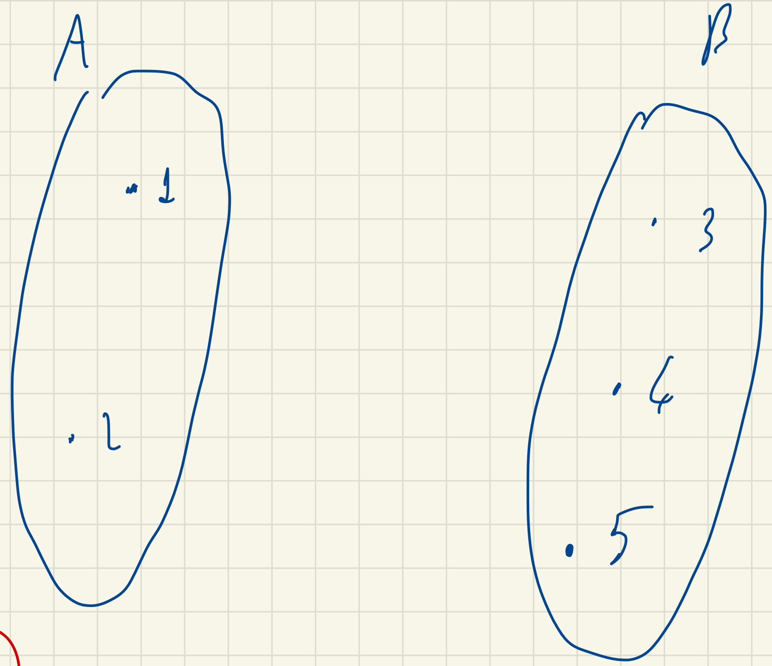
$A, B$ equipotenti $\iff$ $A, B$ hanno lo stesso numero di elementi (= stessa cardinalità)

Esempio:

$A = \{ a, b, c, d \}$ $B = \{ 1, 2, 5, 7 \}$

sono equipotenti:






$\nexists$ una funzione $f: A \to B$ biunivoca

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono infiniti, e

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$$

Tuttavia $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti!

Proviamolo:

bisogna costruire una funzione

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ biunivoca

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$f(0) = 0$

$f(1) = -\dfrac{1+1}{2} = -1$

$f(2) = \dfrac{2}{2} = 1$

$f(3) = -\dfrac{3+1}{2} = -2$

$f(4) = \dfrac{4}{2} = 2$

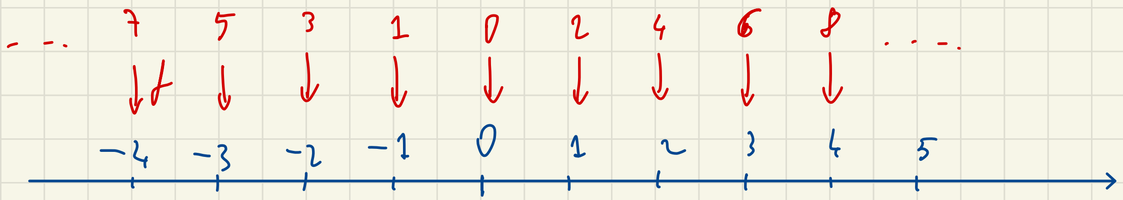
$f(5) = -\dfrac{5+1}{2} = -3$

$\ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

<u>Esercizio</u> :

Verificare che $f$ è biunivoca




**DEF.**: Un insieme $A$ si dice **numerabile** se esiste una funzione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A \quad \text{biunivoca}$$

Quindi $\mathbb{N}$ è banalmente numerabile.

$\mathbb{Z}$ è pure numerabile

LEMMA:

$A$ è numerabile se e solo se
$\exists\ f_1 : A \longrightarrow \mathbb{N}$ suriettiva
$f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow A$ suriettiva

Si può provare che anche l'insieme dei numeri rationali $\mathbb{Q}$ è numerabile.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ MCD(n, |m|) = 1 \right\}$$

Usiamo il Lemma:

$$f_1 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\frac{n}{m} \longmapsto n \qquad (\text{M.C.D.}(n, |m|) = 1)$$

cioè:
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \;,\; f\left(\frac{5}{-4}\right) = 5$$
$$f\left(\frac{5}{-7}\right) = 5 \;,\; f\left(\frac{5}{4}\right) = 5 \;, \ldots$$

$f_1$ è suriettiva, poiché

$\forall n \in \mathbb{N}$ : $\quad f\left(\frac{n}{1}\right) = n$

Domanda :

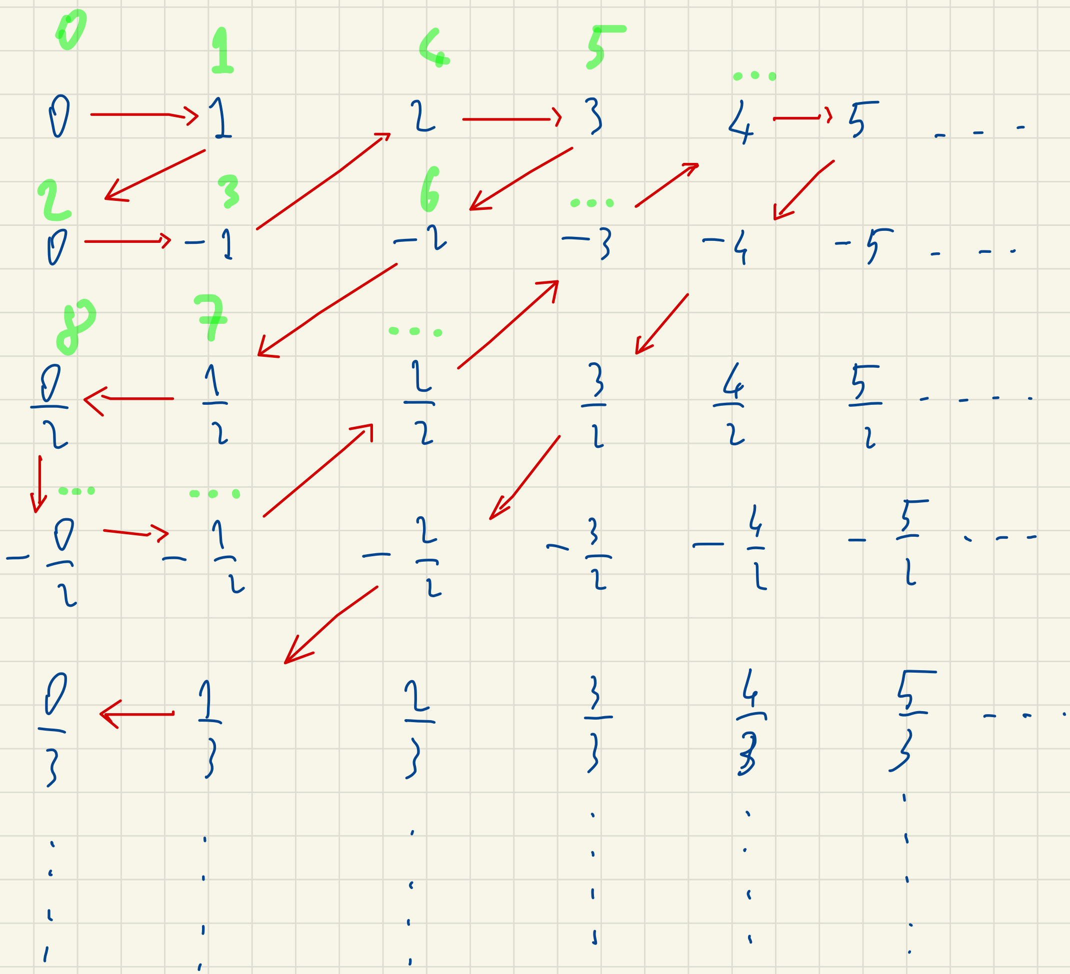
$$\exists\ f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \text{ su } ?$$

Sì !

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\[1em]
0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots \\[1em]
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\[1em]
-\frac{0}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & \cdots \\[1em]
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & \xrightarrow{f_2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
0 & & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots \\
\frac{0}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
-\frac{0}{2} & & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{0}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ è su!




$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

<u>TEOREMA</u>:

$\mathbb{Q}$ è numerabile!

## Sommatoria:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n}^{m} b_j = b_n + b_{n+1} + \dots + b_{m-1} + b_m \\ (n \leq m) \end{cases}$$

## Esempio:

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$=$$

$$\sum_{l=2}^{5} l^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$