BENEDETTA ROSSI

Insieme in analisi

DIVERTIRSI IN SALA STUDIO
CON LE LACRIME DI

FATTO IN CASA
da Benedetta

MONDADORI

FOGLIO 9 - Esercizi Finali.

11 Dicembre 2022 - E. Masina

Dall'Esame del 6 Luglio 2020.

0.

Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{4x^2 + 3}$$

• Disegnare il suo grafico.
• Calcolare l'immagine di $f(x)$ sul dominio naturale $\Omega(f)$.
• Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia due soluzioni reali distinte.

1.

Calcolare mediante i polinomi di Taylor il seguente limite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin(x)) + \frac{1}{2}\ln(1 + x\sin(x)) - 1}{x^4}$$

Si ricordi che per $t \to 0$

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o(t^7)$$

0. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{4x^2+3}\right)' = \frac{(e^{-x})'\cdot(4x^2+3) - (e^{-x})(4x^2+3)'}{(4x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{-e^{-x}(4x^2+3) - 8x\,e^{-x}}{(4x^2+3)^2} = \frac{-e^{-x}(4x^2+8x+3)}{(4x^2+3)^2}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{-\cancel{8}^{2} \pm \cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{-2 \pm 1}{2} \left\langle \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (2x+3)(2x+1)$$

$$\frac{-e^{-x}(2x+3)(2x+1)}{(4x^2+3)^2} = \frac{\overset{N1}{(-2x-3)}\overset{N2}{(2x+1)}}{\underset{D}{(4x^2+3)^2 e^x}}$$

		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
N 1	+	0	−		−
N 2	−		−	0	+
D	+		+		+
$f'(x)$	− ↘		+ ↗		− ↘

f crescente con $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$

altrimenti decrescente

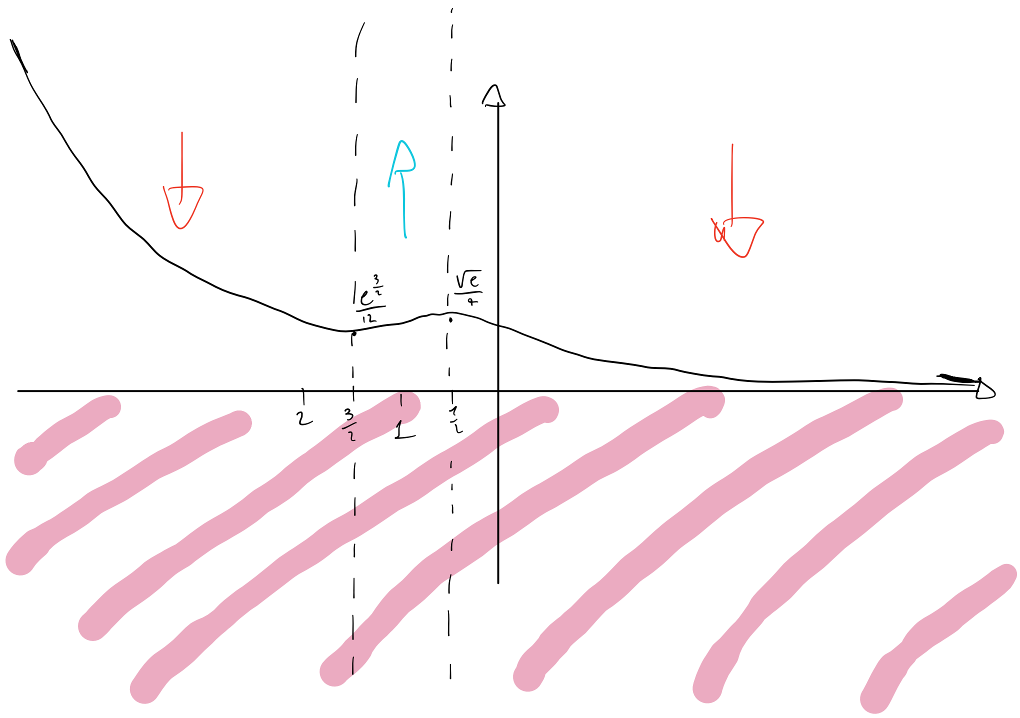
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{4x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \frac{-e^{-x}}{8x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\overset{H}{=} \frac{e^{-x}}{8} = +\infty$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\cancel{4}\frac{9}{\cancel{4}}+3} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{12}$$ minimo relativo

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{4\cdot\frac{1}{4}+3} = \frac{\sqrt{e}}{4}$$ massimo relativo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{4x^2+3} = \frac{1}{(4x^2+3)\cdot e^{x}} = \frac{1}{(+\infty+3)\,+\infty} = \frac{1}{+\infty} = +0$$



Dominio -> tutto $\mathbb{R}$

Immagine -> $\mathbb{R}^+$

la funzione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni di reali distinte per $x = -\frac{3}{2}$ $\lambda = \frac{e^{3/2}}{12}$ e $x = -\frac{1}{2}$ $\lambda = \frac{\sqrt{e}}{4}$

1. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

Dato che al denominatore abbiamo x^4, sviluppo fino al IV grado.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \qquad t = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2!} + o(t^2) \qquad t = x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4)$$

$$\ln\left(1 + x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\cos(\sin x) + \frac{1}{2}\ln(1 + x\sin x) - 1 =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{5}{24}x^4 + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \cancel{-1} = -\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x)\ \frac{1}{2}\ln(1 + x\sin x) - 1}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

$$\lim_{x \to 0} -\frac{5}{24} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}} = -\frac{1}{8}$$

N.B.: nelle soluzioni di Mughetti, il prof sviluppa $x \sin x$ solo al I° di Taylor per poi procedere ad usarlo **sempre** al III°.

Dall'Esame del 28 Maggio 2021.

0.

Sia data la funzione

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 - 3x - 3)e^{-x}$$

• Disegnare il suo grafico.
• Calcolare l'immagine di $f(x)$ sul dominio naturale $\Omega(f)$.
• Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia quattro soluzioni reali distinte.

1.

Calcolare mediante i polinomi di Taylor il seguente limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \sin(x) + \sqrt{1 + x^3} - 1}{x^3}$$

Si ricordi che per $t \to 0$

$$(1+t)^b = 1+bt+\frac{b(b-1)t^2}{2}+\frac{b(b-1)(b-2)t^3}{6}+\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)t^4}{24}+o(t^4)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$$

0. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$f'(x) = (x^3+3x^2-3x-3)' e^{-x} + (x^3+3x^2-3x-3)(e^{-x})' =$$

$$= (3x^2+6x-3)e^{-x} - (x^3+3x^2-3x-3)e^{-x} =$$

$$= (-x^3+9x)e^{-x} = x(9-x^2)e^{-x}$$

		-3		0		+3	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$9-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$		$+$		$+$		$+$
	↗		↘		↗		↘

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3+3x^2-3x-3)e^{-x} = x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)e^{-x} =$$

$$= -\infty(1+0+0+0)\infty = -\infty$$

$$f(-3) = (\cancel{-27}\ \cancel{+27}+9-3)e^3 = 6e^3 \quad (\sim 120)$$

$$f(0) = (0+0+0-3)1 = -3$$

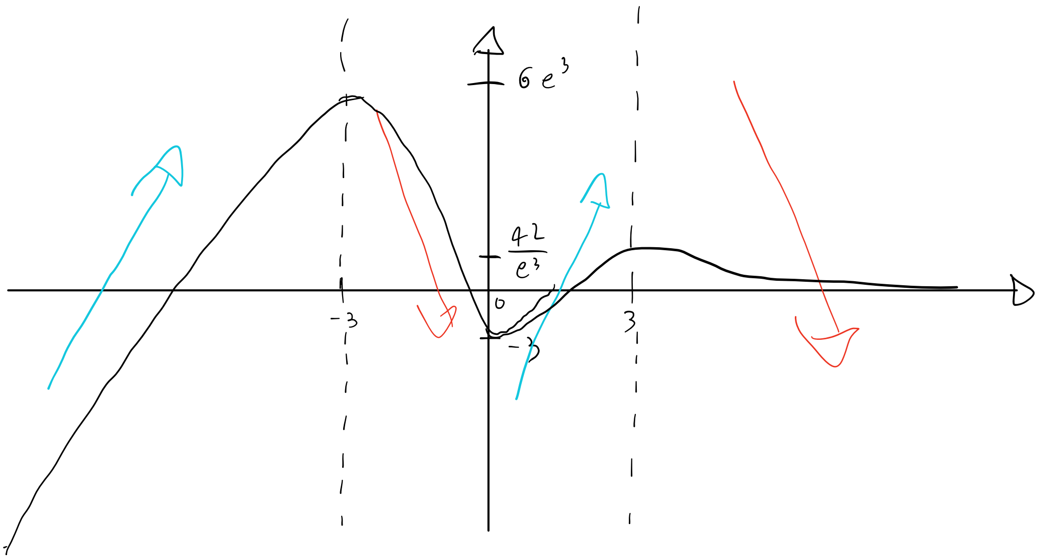
$$f(3) = (27+27-9-3)e^{-3} = \frac{42}{e^3} \quad (\sim 2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+3x^2-3x-3)e^{-x} = x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)e^{-x} =$$

$$\infty(1+0+0+0)0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+3x^2-3x-3)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+6x-3}{e^x} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x+6}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0^+$$



Dominio $\mathbb{R}$

Immagine $]-\infty; 6e^2]$

La funzione $f(x) = \lambda$ ha 4 soluzioni reali distinte quando $\lambda \in]0; \frac{42}{e^3}[$

1. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin(x) + \sqrt{1+x^3} - 1}{x^3} = ?$$

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t) \qquad t = x^3 \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$(1+x^3)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^3 x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin(x) + \sqrt{1+x^3} - 1}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} \cancel{- x} + \frac{x^3}{6} \cancel{+1} + \frac{1}{2}x^3 \cancel{-1} + o(x^3)}{x^3} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Dall'Esame del 3 Giugno 2022.

0.

Sia data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)$$

• Disegnare il suo grafico (dominio naturale, limiti ai bordi del dominio, zeri e segno della derivata prima).
• Calcolare l'immagine di $f(x)$ sul dominio naturale $\Omega(f)$.
• Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia due soluzioni reali distinte.

1.

Calcolare mediante i polinomi di Taylor il seguente limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))^2 + 2\cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 2}{x^4}$$

Si ricordi che per $t \to 0$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o(t^7)$$

0. Procedimento verificato con le soluzioni del prof *

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x^2+3)'(x-1)-(x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(x^2+3)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{2x(x-1) - x^2 - 3}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(x-1)^2+(x^2+3)^2}{\cancel{(x-1)^2}}} \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{\cancel{(x-1)^2}} = \frac{\overset{N1}{(x-3)}\,\overset{N2}{(x+1)}}{(x-1)^2+(x^2+3)^2}$$

Il denominatore e' sempre positivo.

		-1		3	
N1	$-$		$-$	0	$+$
N2	$-$	0	$+$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x = -1$ max. rel.

$x = 3$ min. rel.

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)$$ Analizziamo separatamente $\frac{x^2+3}{x-1}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{\infty}{-\infty} \overset{H}{=} \frac{2x}{1} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = \operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg}(2)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{0^-}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

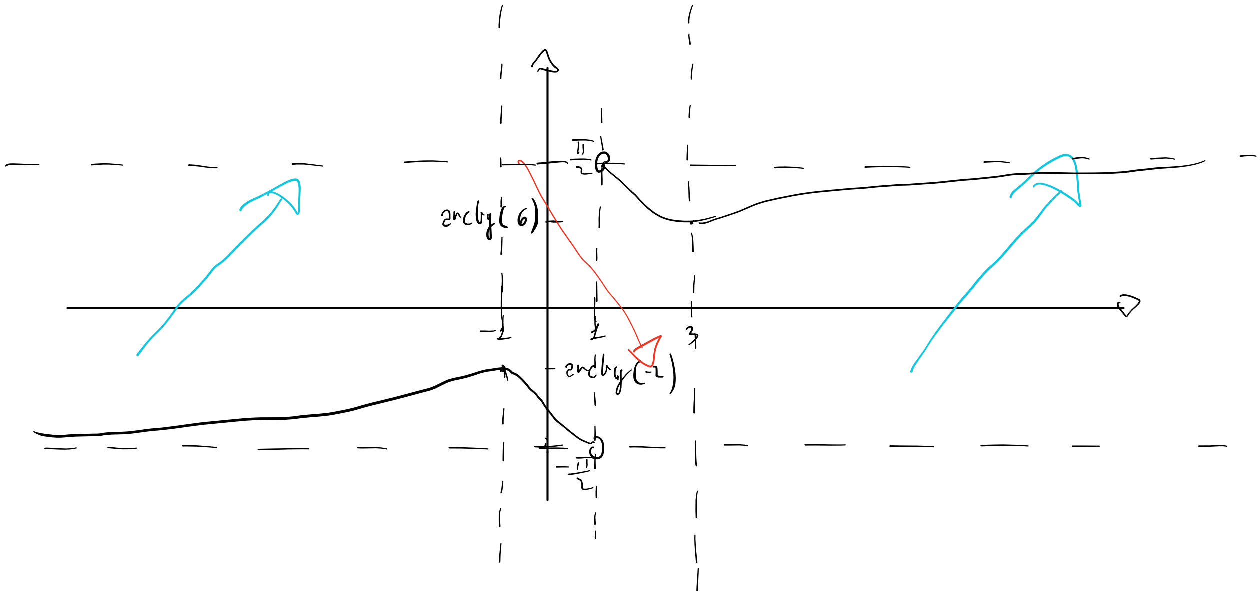
$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(3) = \operatorname{arctg}(6)$$

$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)$ Analizziamo $\frac{x^2+3}{x-1}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$



Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Immagine $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cup \left[\operatorname{arctg}(6); \frac{\pi}{2}\right[$

L'equazione $f(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ ha 2 soluzioni distinte per $\lambda \in \left]-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}(-2)\right[$ e $\left]\operatorname{arctg}(6); \frac{\pi}{2}\right[$

* $f(x) = \lambda$ non verificato per differenza del testo d'esame con quello dell'esercizio (anche se la soluzione é molto plausibile)

1. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))^2 + 2\cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 2}{x^4}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$(\ln(1+x))^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \qquad t = x - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1+x) + 2\cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 2}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} \cancel{- x^3} + \frac{11}{12}x^4 \cancel{+2} \cancel{-x^2} \cancel{+x^3} - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \cancel{-2}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}} + \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{3}{4}$$

Dall'Esame del 10 Gennaio 2020.

$$f(x) = xe^{-\ln^2(x)}$$

- Disegnare il suo grafico.
- Calcolare l'immagine di $f(x)$ sul dominio naturale $\Omega(f)$.
- Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia due soluzioni reali distinte.

1.

Calcolare mediante i polinomi di Taylor il seguente limite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1 - 4x^2 + x^4} + e^{x^2} - 2}{x^4}$$

Si ricordi che per $t \to 0$

$$(1+t)^b = 1+bt+\frac{b(b-1)t^2}{2}+\frac{b(b-1)(b-2)t^3}{6}+\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)t^4}{24}+o(t^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} + o(t^6)$$

0. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$f'(x) = e^{-\ln^2 x} + \cancel{x} e^{-\ln^2 x}(-2\ln x)\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \underbrace{e^{-\ln^2 x}}_{I}\underbrace{(1-2\ln x)}_{II}$$

I

$e^{-\ln^2 x}$ sempre positivo

II

$1-2\ln x \geq 0 \qquad 2\ln x \leq 1 \qquad e^{\ln x^2} \leq e$

$x^2 \leq e \qquad x \leq \pm\sqrt{e} \qquad -\sqrt{e} \leq x \leq +\sqrt{e}$

x deve essere sempre maggiore di 0

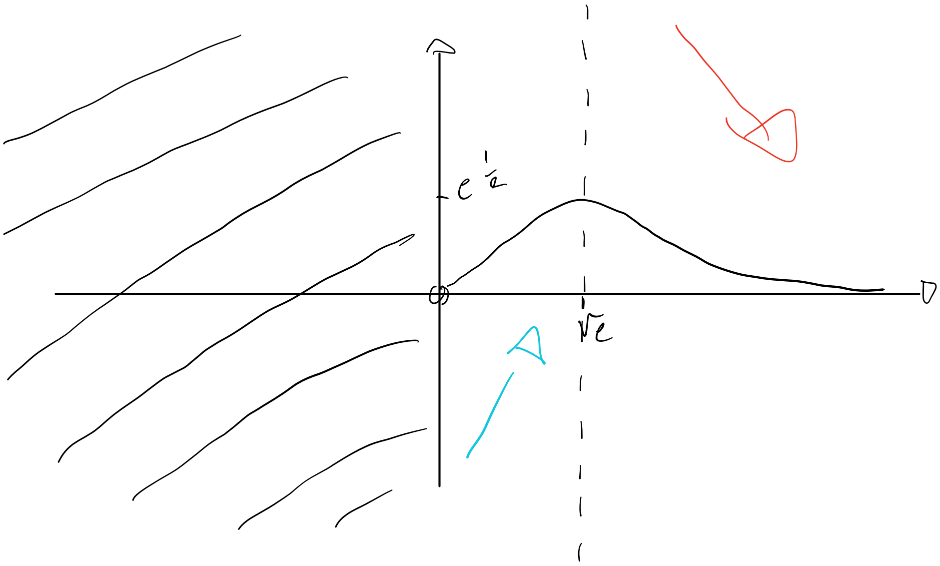
$= \quad II \geq 0 \quad$ con $\quad 0 < x \leq +\sqrt{e}$

	0		$\sqrt{e}$	
I	/	+		+
II	/	+		−
	/	↗		↘

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\ln x - \ln^2 x} = e^{-\infty - \infty} = 0$$

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \cdot e^{-\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\ln x - \ln^2 x} = e^{\infty - \infty} = e^{\ln^2 x \left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)} = e^{\infty(0-1)} = 0$$



Dominio $x > 0$

Im $y \in \,]0; e^{\frac{1}{4}}]$

L'equazione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni reali distinte

per $\lambda \in \,]0; e^{\frac{1}{4}}[$

1. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x^2+x^4}+e^{x^2}-2}{x^4}$$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \qquad t=x^2$$

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+o(t^2) \qquad t=-4x^2+x^4 \quad \alpha=\frac{1}{4}$$

$$(1-4x^2+x^4)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}(-4x^2+x^4)+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2}(-4x^2+x^4)^2+o(x^4)$$

$$=1-x^2+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)=1-x^2-\frac{5}{4}x^4+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-4x^2+x^4}+e^{x^2}-2}{x^4}=$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{x^2}-\frac{5}{4}x^4\cancel{+1}\cancel{+x^2}+\frac{x^4}{2}\cancel{-2}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0} -\frac{3}{4}+\frac{o(x^4)}{x^4}=-\frac{3}{4}$$

Dall'Esame del 1 Giugno 2020.

0.

$$f(x) = (2x+1)\, e^{\frac{2x^2+8}{x+2}}$$

• Disegnare il suo grafico.
• Calcolare l'immagine di $f(x)$ sul dominio naturale $\Omega(f)$.
• Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia tre soluzioni reali distinte.

1.

Calcolare mediante i polinomi di Taylor il seguente limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x\cos(x)) - \sin(x) - \cos(x) + 1}{x^4}$$

Si ricordi che per $t \to 0$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o(t^7)$$

0. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$Df = \left((2x+1)\, e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} \right)' =$$

$$= 2 e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} + (2x+1) \cdot e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} \, \frac{4x(x+2) - (2x^2+8)}{(x+2)^2}$$

$$= e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} \left(\frac{(2x^2+8x-8)(2x+1) + 2(x^2+4x+4)}{(x+2)^2} \right)$$

$$= e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} \, \frac{4x^3+20x^2}{(x+2)^2} = e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} \cdot \frac{4x^2}{(x+2)^2} \cdot (x+5)$$

$$e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} \cdot \frac{4x^2}{(x+2)^2}$$ sempre positivo

		-5		-2	
f'	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$x = -5$ min. loc.

$$\lim_{x \to -\infty} (2x+1)\, e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\frac{2x+1}{e^{-\frac{2x^2+8}{x+2}}} \overset{H}{=} \frac{2}{-e^{-\frac{2x^2+8}{x+2}} \cdot \frac{4x(x+2) - 2x^2 - 8}{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{2}{-e^{-\frac{2x^2+8}{x+2}} \cdot \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2}} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

raccolgo e semplifico

raccolgo x^2 e semplifico

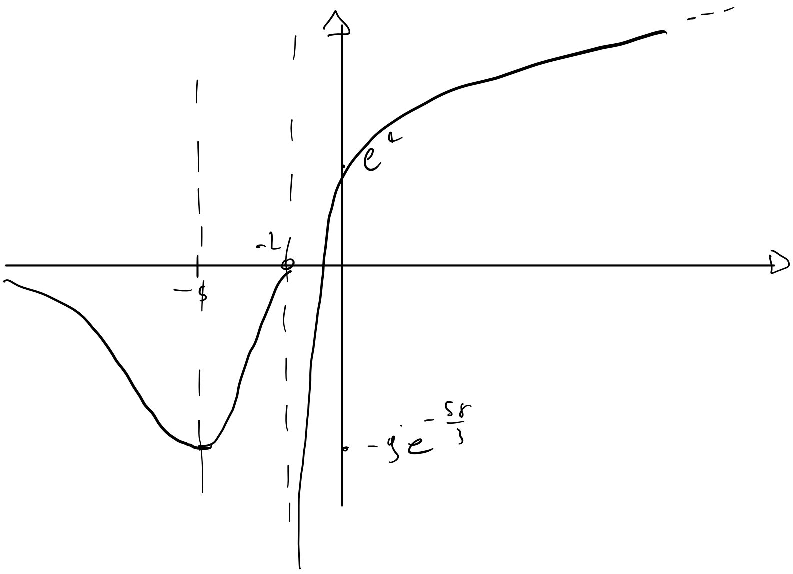
$$f(-5) = -9e^{-\frac{58}{3}}$$

$$\lim_{x \to -2^-} -3e^{\frac{8}{0^-}} = -3e^{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \to -2^+} -3e^{\frac{8}{0^+}} = -3e^{+\infty} = -\infty$$

$$f(0) = e^4$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x+1) \cdot e^{\frac{2x^2+8}{x+2}} = \infty \cdot e^{\infty} = +\infty$$



Dominio $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Immagine $\mathbb{R}$

L'equazione $f(x) = \lambda$ ha 3 soluzioni reali distinte per

$\lambda \in \left] -9e^{-\frac{58}{3}} ; 0 \right[$

1. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x\cos x) - \sin x - \cos x + 1}{x^4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \qquad t = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$\ln\left(1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{4}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$-\cos x = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$-\sin x = -x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1\ x\cos x) - \sin x - \cos x + 1}{x^4} =$$

$$= \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{4}x^4 \cancel{- x} + \cancel{\frac{x^3}{6}} \cancel{- 1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} \cancel{+1} + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{24} \cdot \frac{o(x^4)}{x^2}$$

$$= \frac{5}{24}$$

brau * Non ci capisco una minchia, faccio scienze politiche*

Anche io quando ho bisogno di una mano mi faccio aiutare!

Dall'Esame del 9 Settembre 2022.

0.

il testo d'esame ha +4 e non −4

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1}$$

• Disegnare il suo grafico.
• Calcolare l'immagine di $f(x)$ sul dominio naturale $\Omega(f)$.
• Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia una sola soluzione reale.

1.

Calcolare mediante i polinomi di Taylor il seguente limite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{x+1} - e^{x^2} - x}{x^3}$$

Si ricordi che per $t \to 0$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} + o(t^6)$$

0. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}\right)' = \frac{(2x+3)(x^2-1) - 2x(x^2+3x+4)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + 3x^2 - 2x - 3 - \cancel{2x^3} - 6x^2 - 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{(-x-3)}^{\mathrm{I}}\ \overbrace{(3x+1)}^{\mathrm{II}}}{\underbrace{(x^2-1)^2}_{\mathrm{III}}}$$

		-3		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
I	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$
II	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
III	$+$		$+$	$\times$	$+$		$+$	$\times$	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$x = -3,\ -\frac{1}{3}$ max loc.

$x = -1,\ 1$ min loc.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \frac{\infty - \infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$f(-3) = \frac{9-9+4}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \frac{1-3+4}{0^+} = +\infty$$

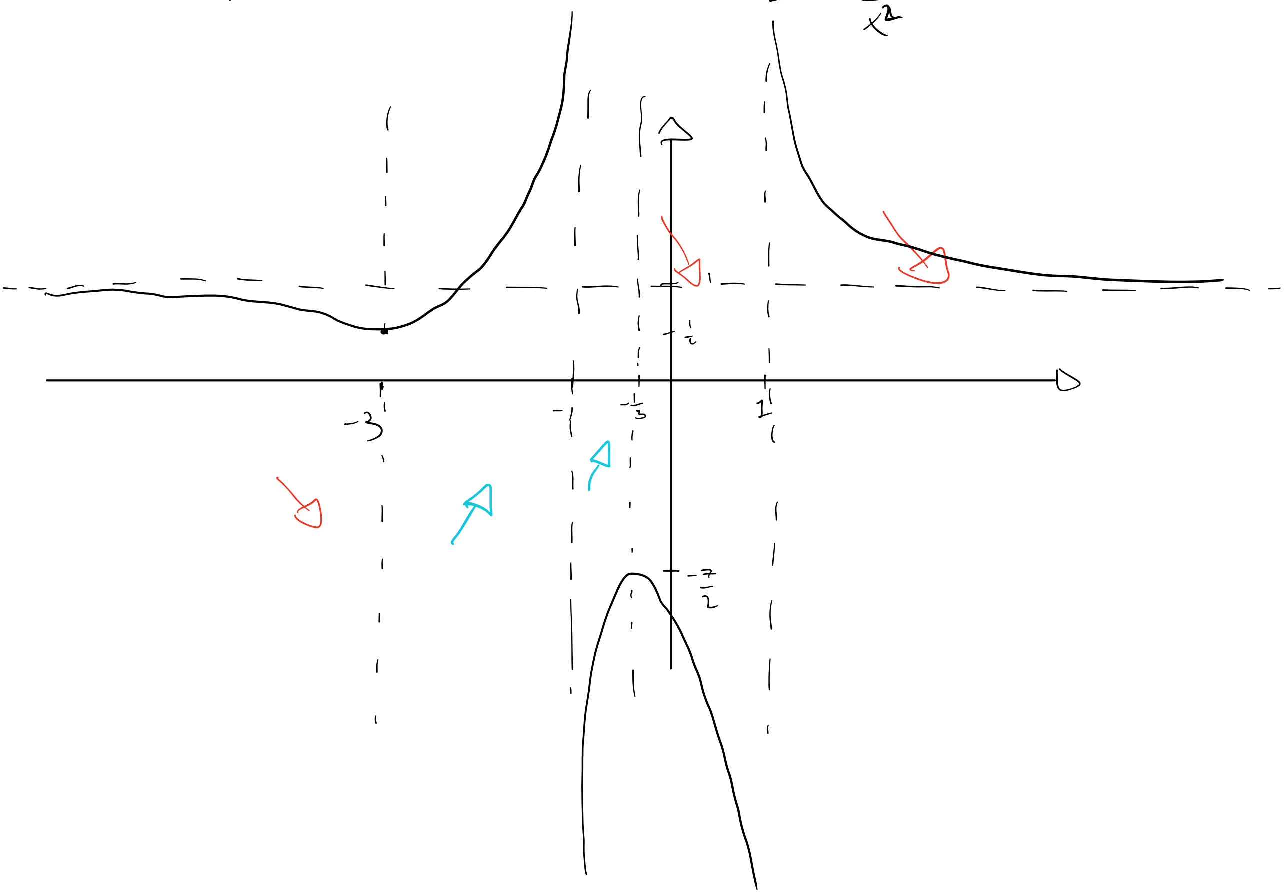
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \frac{1-3+4}{0^-} = -\infty$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9}-1+4}{\frac{1}{9}-1} = \frac{\frac{1+27}{3}}{-\frac{8}{9}} = \frac{\frac{28}{9}}{-\frac{8}{9}} = -\frac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{8}\,2} = -\frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \frac{1+3+4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \frac{1+3+4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \dots = \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$



Dominio $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Immagine $y \in \left]-\infty ; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

L'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale per

$\lambda = -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 1$

2. Procedimento verificato con le soluzioni del prof

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^{x+1} - e^{x^2} - x}{x^3}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + o(t^2) \qquad t = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$(x+1)^{x+1} = e^{(x+1)\ln x+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$(x+1)\ln(1+x) = x^2 + x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + o(t^3) \qquad t = (x+1)\ln(x+1)$$

$$e^{(x+1)\ln(x+1)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2!}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3\right) + \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1+x} - e^{x^2} - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{x} + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Ora che ho fatto cussí molte volte sono pronta per andare da Mughetti e fargli il culo grosso cussí!

Fatto con disperazione per voi!