ΜΡ ΘΥ
Ο ΑΡ Μ
Ο ΑΡ Γ
ΙC ΧC

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica (I Modulo)

3 Giugno 2022 (M.Mughetti)

Soluzioni prive di calcoli e delle necessarie spiegazioni NON SARANNO VALUTATE.

Esercizio 1(pt. 9)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \arctan \frac{x^2+3}{x-1}.$$

I Disegnare il suo grafico (dominio naturale $\mathcal{D}(f)$ di f, limiti ai bordi del dominio di f, zeri e segno della derivata prima).

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $K \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = K$ ha un'unica soluzione.

Esercizio 2(pt. 6)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^6)$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))^2 + 2\cos(x - \frac{x^2}{2}) - 2}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE preliminarmente gli sviluppi totalmente semplificati di:

$$(\ln(1+x))^2, \quad \cos(x - \frac{x^2}{2})$$

e infine il limite assegnato.

ANALISI MATEMATICA. INFORMATICA SECONDO MODULO
3 GIUGNO 2022

1. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(1+xy)^3 - x^2 - y^2.$$

2. Sul triangolo A di vertici $(1,0)$, $(0,2)$ e $(1,2)$ calcolare

$$\int_A \frac{1}{1+2y}\, dxdy.$$

3 giugno 2022

Esercizio 1(pt. 9)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \arctan \frac{x^2+3}{x-1}.$$

I Disegnare il suo grafico (dominio naturale $\mathcal{D}(f)$ di f, limiti ai bordi del dominio di f, zeri e segno della derivata prima).

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $K \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = K$ ha un'unica soluzione.

$$f(x) = \arctan \frac{x^2+3}{x-1}$$

1) DOMINIO

$D \neq 0 \to x-1 \neq 0 \to x \neq 1$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) simmetrie facoltativo

$$f(-x) = \arctan \frac{(-x)^2+3}{-x-1}$$

$$= \arctan \frac{x^2+3}{-(x+1)}$$

$$= -\arctan \frac{x^2+3}{x+1} \ \ != f(x)$$

$$!= -f(x) \to -\arctan \frac{x^2+3}{x-1}$$

non ci sono simmetrie

3) studio del segno facoltativo

$$f(x) \geq 0$$

$$\arctan \frac{x^2+3}{x-1} \geq 0$$

$$\tan\left(\arctan \frac{x^2+3}{x-1}\right) \geq \tan 0$$

$$\begin{array}{l} N: \\ D: \end{array} \frac{x^2+3}{x-1} \geq 0$$

$N: x^2+3 \longrightarrow$ sempre positivo

$$D: \quad x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1$$

	$x < 1$	1	$x > 1$
N:	+ + + +		+ +
D:	- - - -	1	+ +
$f(x)$	- - - -	1	+ +

intersezione con l'asse y

$$f(0) = \arctan \frac{0^2+3}{0-1}$$

$$= \arctan -3$$

$y = -\arctan 3 \rightarrow$ punto in cui la funzione attraversa l'asse y

4) limiti e asintoti

la funzione arctan può assumere al massimo valore $\pm\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} \arctan\frac{x^2+3}{x-1} = \arctan\frac{\cancel{x^2}\left(1+\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\cancel{\frac{1}{x}}\right)} = -\infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$= +\infty = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to1^- \\ x\to1^+}} \arctan\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) = \arctan\frac{+4}{0^-} = -\infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$= +\infty = +\frac{\pi}{2}$$

5) studio del segno della derivata prima

$$f(g(x)) = \arctan\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) \quad g(x)$$

é una funzione composta

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = g'(x)\cdot f'(g(x)) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

- $$g'(x) = \frac{(2x)(x-1)-(x^2+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan(x)\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

- $$f'(g(x)) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{(x^2+3)^2}{(x-1)^2}} = \frac{1}{\frac{(x-1)^2+(x^2+3)^2}{(x-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2+(x^2+3)^2}\cdot\frac{(x-1)^2}{1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{\cancel{(x-1)^2}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^2+(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2+(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \longrightarrow \frac{N:\ x^2-2x-3}{D:\ (x-1)^2+(x^2+3)^2} \geq 0$$

si studia solo il segno del N perché D è sempre positivo

$N:\ x^2-2x-3 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} = 3 \\ x_2 = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}} = -1 \end{cases}$$

$D:\ (x-1)^2+(x^2+3)^2 > 0$ → sempre positivo perche somma di quadrati.

$x^2-2x+1+x^4+6x^2+9 > 0$

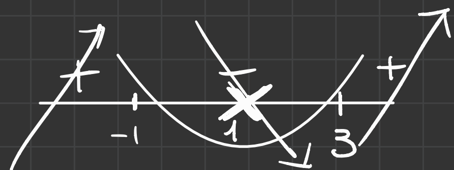
$x^4+5x^2-2x+10 > 0$

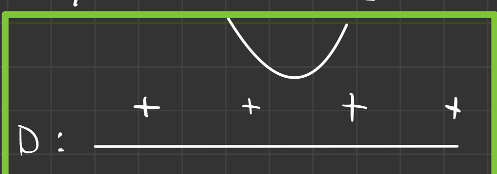
P.S. anche nel punto critico 1 perché in quel caso gli viene sommata lo stesso la seconda parentesi che é strettamente positiva

→ nel caso $x=1$

$\emptyset + 16 = 16$

N:



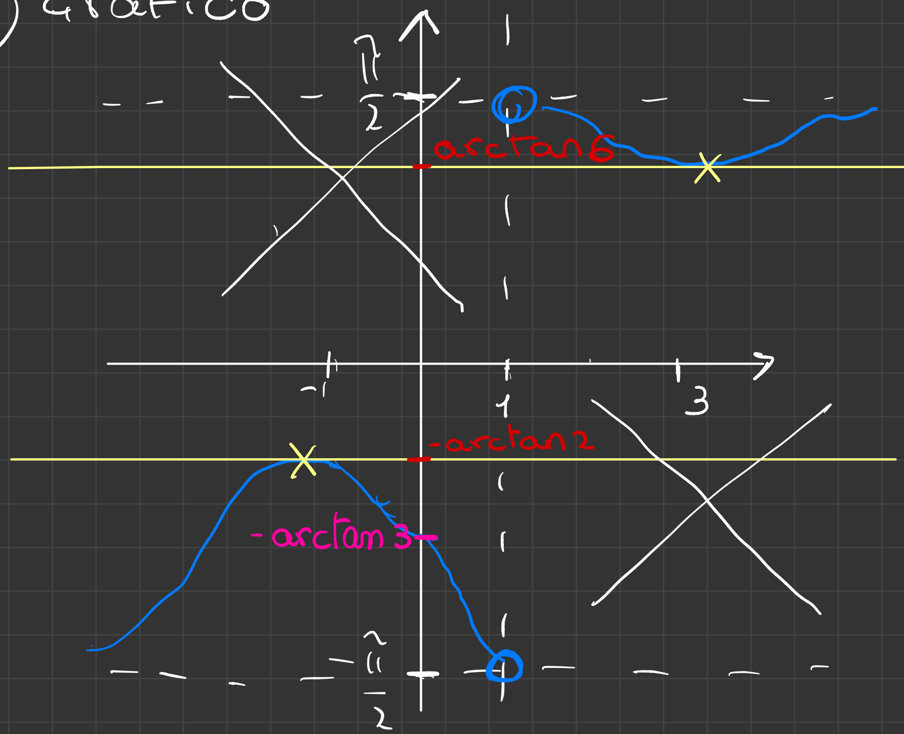


Punti di massimo e minimo relativi

$f(-1) = \arctan\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{-\cancel{2}}\right) = -\arctan 2 \rightarrow$ $x=-1$ punto di max relativo

$f(3) = \arctan\left(\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{2}}\right) = \arctan 6 \rightarrow$ $x=3$ punto di min relativo

I Grafico



II

$$\operatorname{Im} f = \left]-\frac{\pi}{2}, \arctan(2)\right] \cup \left[\arctan 6, \frac{\pi}{2}\right[$$

III

$f(x) = K$ ha una sola soluzione per $K = \arctan 6$ e
$K = -\arctan 2$

geometricamente indica l'intersezione tra il grafico di f e la retta $y = K$

3 giugno 2022

Esercizio 2(pt. 6)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^6)$,
- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))^2 + 2\cos(x - \frac{x^2}{2}) - 2}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE preliminarmente gli sviluppi totalmente semplificati di:

$$(\ln(1+x))^2, \quad \cos(x - \frac{x^2}{2})$$

e infine il limite assegnato.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(\ln(1+x))^2}^{\to 0} + \overbrace{2\cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 2}^{\to 0}}{\underbrace{x^4}_{\to 0}}$$

per $x \to 0 = \frac{0}{0}$
forma indeterminata

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(x^3)$

$$(\ln(1+x))^2 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cancel{o(x^3)}\right)^2$$

vale 0

* mangiati da $o(x^4)$, non abbiamo bisogno di esponenti così alti

$$= \left(x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{9}x^9 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^5 + o(x^3)\right)$$

$$\to = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4)$

$$\cos\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^4 + o\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2$$

ci interessa solo

$$x^4 + \frac{3}{2}x^6 + \frac{x^8}{16} - 2x^5 - \frac{x^7}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \to = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{24}\,12} + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) - 2}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^3} + \frac{11}{12}x^4 + \cancel{2} - \cancel{x^2} + \cancel{x^3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \cancel{2}}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{12}\,4} x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{3}{4} + \cancel{o(1)}^{\,0}\right)}{\cancel{x^4}} = \frac{3}{4}$$

3 giugno 2022

1. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(1+xy)^3 - x^2 - y^2.$$

• Calcolo delle derivate parziali

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}\cdot(1+yx)^3 - x^2 - y^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+g) = \frac{\partial}{\partial x}(f) + \frac{\partial}{\partial x}(g)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(1+yx)^3}{3}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \cancel{\frac{\partial}{\partial x}(y^2)}\ \emptyset$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(a*f) = a*\frac{\partial}{\partial x}(f)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(1+yx)^3 - 2x$$

$$\searrow g \qquad f = g^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(g(x))) = \frac{\partial}{\partial x} g'(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f'(g(x))$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(1+yx)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(g^3) - 2x$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\, y\cdot\cancel{3}g^2 - 2x \rightarrow y(1+yx)^2 - 2x$$

$$f_y = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((1+xy)^3\right) - \cancel{\frac{\partial}{\partial y}(x^2)}^{\,0} - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\, x \cdot \cancel{3}\, g^2 - 2y \;\to\; x(1+xy)^2 - 2y$$

- sistema per vedere dove si annulla il gradiente

$$\begin{cases} y(1+yx)^2 - 2x = 0 \\ x(1+yx)^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

sottraggo membro a membro le due equazioni

$$(1+yx)^2(y-x) + 2(y-x) = 0$$

$$\to \left((1+yx)^2 + 2\right)(y-x) = 0 \qquad > 0 \ \forall (x,y)$$

$$\to y - x = 0 \to y = x \to \text{sostituiamo nella } 1^a \text{ eq.}$$

$$(1+xy)^2 y - 2x = 0 \to (1+x^2)^2 x - 2x = 0$$

$$\to x\left((1+x^2)^2 - 2\right) = 0 \to x = 0 \ \lor \ (1+x^2)^2 - 2 = 0$$

considero positivo altrimenti

$$\to x = 0 \ \lor \ 1 + x^2 = \pm\sqrt{2} \to x = 0 \ \lor \ x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

è impossibile

metodo alternativo

- se $x, y = 0$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

punto critico:

$$P_1 = (0,0)$$

i punti critici sono:

$$(0,0)\ ;\ \left(\pm(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}, \pm(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

• se $x, y \neq \emptyset$

$$\begin{cases} \dfrac{\cancel{y}(1+yx)^2}{y} = \dfrac{2x}{y} \\ \dfrac{\cancel{x}(1+yx)^2}{x} = \dfrac{2y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{yx}{\cancel{2}}\dfrac{\cancel{2}y}{x} = \dfrac{\cancel{2}x}{y} \cdot \dfrac{\cancel{y}x}{\cancel{2}} \\ (1+yx)^2 = \dfrac{2y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ (1+yx)^2 = \dfrac{2y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y| = |x| \\ (1+yx)^2 = \dfrac{2y}{x} \end{cases}$$

$|a| = k \rightarrow k = a \cup k = -a$

$|x| = |y| \rightarrow$ abbiamo 4 casi

$y = x$; $-y = -x \rightarrow (-1)y = x(-1) == -y = -x$

$y = -x$; $-y = x \rightarrow (-1)y = -x(-1) == -y = x$

→ caso $y = x$

$$\begin{cases} y = x \\ (1+x^2)^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 + x^2 = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

considero positivo altrimenti é impossibile

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{cases}$$

• $P_2 = \left((\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}, (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}} \right)$

• $P_3 = \left(-(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}, -(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}} \right)$

→ caso $y = -x$

$$\begin{cases} y = -x \\ (1+x^2)^2 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^4 + 2x^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

sempre positivo = negativo

non ha soluzioni

$t = x^2$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

impossibile

- matrice Hessiana

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\,(1+yx)^2 - 2x \right) \Rightarrow y\left[(1+yx)^2\right]' - [2x]'$$

$$= y\left(y \cdot 2(1+yx)\right) - 2 \Rightarrow 2(1+yx)y^2 - 2$$

teorema di schwartz

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ allora $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$

$$f_{yx} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y(1+yx)^2 - 2x \right) \Rightarrow \left[y(1+yx)^2 \right]'$$

$$= (1+yx)^2 + y\left(x \cdot 2(1+yx)\right) \Rightarrow (1+yx)^2 + 2xy(1+yx)$$

$$= (1+yx)\left((1+yx) + 2xy\right) \Rightarrow (1+yx)(3yx+1)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x(1+xy)^2 - 2y \right) \Rightarrow 2(1+xy)x^2 - 2$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(1+xy)y^2 - 2 & (1+xy)(3xy+1) \\ (1+xy)(3xy+1) & 2(1+xy)x^2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(0,0) = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\partial_x^2 f(0,0) = -2 < 0$$

$(0,0)$ p.to di massimo relativo

$$\mathcal{H}_f\left((\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}, (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & \sqrt{2}(3\sqrt{2}-2) \\ \sqrt{2}(3\sqrt{2}-2) & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}_f\left((\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}, (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= (2-2\sqrt{2})^2 - 2(3\sqrt{2}-2)^2$$

$$= 4-8\sqrt{2}+8-2(18-12\sqrt{2}+4)$$

$$= 4-8\sqrt{2}\cancel{+8}-36+24\sqrt{2}\cancel{-8}$$

$$= -32+16\sqrt{2} = 16(\sqrt{2}-2) < 0 \rightarrow \text{p.to di sella}$$

allo stesso modo si ha che

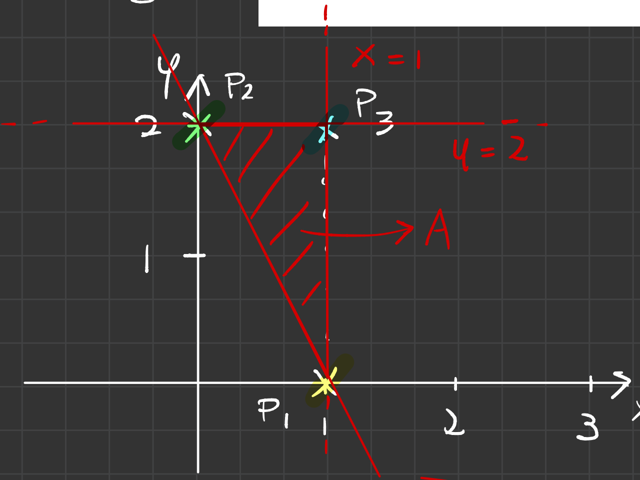
$\left(-(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}, -(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right)$ é p.to di sella

le matrici hessiane di questi due punti sono equivalenti poiche $xy == x^2 == y^2 = \sqrt{2}-1$

3 giugno 2022

- triangolo

2. Sul triangolo A di vertici $(1,0)$, $(0,2)$ e $(1,2)$ calcolare
$$\int_A \frac{1}{1+2y}\,dxdy.$$



eq. retta per P_1 e P_3
↳ $x = 1$

eq retta per P_2 e P_3
↳ $y = 2$

$y = mx + q$

P_1: $m + q = 0$
P_2: $q = 2$

$$\begin{cases} m = -2 \\ q = 2 \end{cases} \rightarrow$$

eq. retta per P_1 e P_2
$y = -2x + 2$

A come y-semplice:
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -2x+2 \le y \le 2 \right\}$$

A come x-semplice:
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2,\ -\frac{1}{2}y + 1 \le x \le 1 \right\}$$

$$\int_A \frac{1}{1+2y}\,\partial y \partial x = \int_0^1 \int_{-2x+2}^{2} \frac{1}{1+2y}\,\partial y \partial x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2y}\,\partial y\,\partial x = \int_0^1 \left|\frac{1}{2}\ln(1+2y)\right|_{-2x+2}^{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(5-4x)$$

$$\frac{1}{2}\ln(5)\int_0^1 1\,\partial x - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(5-4x)\,\partial x$$

- $5-4x=t \rightarrow \partial t = -4\partial x \rightarrow \partial x = -\frac{1}{4}\partial t$

  $x=1 \rightarrow 5-4=1$

  $x=0 \rightarrow 5-0=5$

$$\frac{1}{2}\ln(5)\int_0^1 1\,\partial x - \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{4}\int_5^1 \ln(t)\,\partial t$$

$$\frac{1}{2}\ln(5)\cancelto{1}{\left|x\right|_0^1} + \frac{1}{8}\int_5^1 \ln(t)\,\partial t$$

- integrazioni per parti

$$\int f(x)g'(x)\,\partial x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\partial x$$

$$\int \ln(t) * (1)\,\partial t = t\ln(t) - \int \frac{1}{\cancel{t}}\cancel{t}\,\partial t$$

$$= t\ln(t) - t$$

$$\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{8}\Big| t\ln(t) - t \Big|_{1}^{5}$$

$$\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{8}\left(5\ln(5) - 5 - \left(\cancel{1\ln 1} - 1\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{8}\left(5\ln(5) - 4\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{5}{8}\ln(5) + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\ln(5)$$

svolgimento alternativo

$$\int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}y+1}^{1} \frac{1}{1+2y}\,\partial x\,\partial y = \int_0^2 \frac{1}{1+2y} \int_{-\frac{1}{2}y+1}^{1} 1\,dx\,dy$$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+2y} \left| x \right|_{-\frac{1}{2}y+1}^{1} \partial y = \int_0^2 \frac{1}{1+2y}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}y \cancel{-1}\right)\partial y$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{y}{1+2y}\,\partial y = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{2y}{1+2y}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{2y+1-1}{2y+1}\,dy$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2 1\,\partial y - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{2y+1}\,dy = \frac{1}{4}\left|y\right|_0^2 - \frac{1}{8}\int_0^2 \frac{2}{2y+1}\,\partial y$$

$$\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\cancel{2} - \frac{1}{8}\left|\ln(2y+1)\right|_0^2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\left(\ln(5) - \cancel{\log 1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\ln(5)$$

SECONDO PARZIALE – 25 MAGGIO 2022
TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

1. Dato l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x - x^2\}$, calcolare l'integrale

$$\int_A (x-1)e^y \, dxdy$$

2. Individuare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y^3$$

~~3.~~ Data la funzione di due variabili non svolto

$$f(x,y) = \sin(xe^{-2y})$$

e il punto $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{\pi}{3}, \ln(\sqrt{2}))$, individuare la direzione di massima crescita $v_{\max}$ in tale punto e il corrispondente valore della derivata $\frac{\partial f}{\partial v_{\max}}(\frac{\pi}{3}, \ln(\sqrt{2}))$

25 maggio 2022

1. Dato l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x - x^2\}$, calcolare l'integrale

$$\int_A (x-1)e^y \, dxdy$$

$$\frac{x}{2} \leq 2x - x^2 \rightarrow \frac{3}{2}x - x^2 \geq 0 \rightarrow x\left(\frac{3}{2} - x\right) \geq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\int_A (x-1)e^y \, dxdy \rightarrow \int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{x}{2}}^{2x-x^2} (x-1)e^y \, \partial y \partial x$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} (x-1) \int_{\frac{x}{2}}^{2x-x^2} e^y \, \partial y \, \partial x =$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} (x-1) \left| e^y \right|_{\frac{x}{2}}^{2x-x^2} \partial x =$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \left((x-1)e^{2x-x^2} - (x-1)e^{\frac{x}{2}} \right) \partial x$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} (x-1)e^{2x-x^2} \partial x - \int^{\frac{3}{2}} \underbrace{(x-1)}_{f(x)} \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{g'(x)} \partial x$$

integrazione per parti $\rightarrow \int f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)$

$(x-1) \cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}}$

$$2(x-1)e^{\frac{x}{2}} - 2\cdot 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$2(x-1)e^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}$$

$$2e^{\frac{x}{2}}\left((x-1)-2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} 2(x-1)e^{2x-x^2}\,\partial x - \left|2e^{\frac{x}{2}}\left((x-1)-2\right)\right|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\left|e^{2x-x^2}\right|_0^{\frac{3}{2}} - \left|2e^{\frac{x}{2}}\left((x-1)-2\right)\right|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\frac{3}{2}-\frac{9}{4}} - \cancel{e^{0}}^{\,1}\right) - \left(2e^{\frac{3}{2}/2}\left(\frac{3-2}{2}-2\right) - 2\cancel{e^{0}}^{\,1}\cdot(-3)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{4}} - 1\right) - \left(\cancel{2}e^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1-4}{\cancel{2}}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} + 3e^{\frac{3}{4}} = \frac{6-1}{2}e^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}e^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$$

25 maggio 2022

2. Individuare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y^3$$

$$f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + y^2 - y^3\right) = 2x - y$$

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + y^2 - y^3\right) = 2y - 3y^2 - x$$

$$f'_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) = 2$$

$$f'_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2y - 3y^2 - x) = 2 - 6y$$

$$f'_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(2y - 3y^2 - x) = -1 = f_{yx}$$ schwartz

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - 3y^2 - x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x \\ 2(2x) - 3(2x)^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ 4x - 12x^2 - x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} / \\ x(-12x + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \ \vee \ x = -\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{12}_{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$P_1(0,0)$, $P_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ → p.ti critici della funzione

$\mathcal{H}_f(x,y) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2-6y \end{bmatrix}$ → matrice hessiana della funzione

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \det \mathcal{H}_f(0,0) = (2 \cdot 2) - (-1 \cdot -1) = 4 - 1 = 3 > 0 \\ f'_{xx} = 2 > 0 \end{cases}$$

→ p.to minimo relativo

$$\mathcal{H}_f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2-\cancel{6}^{\,3}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}_f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = (2 \cdot -1) - (-1 \cdot -1) = -2 + 1 = -1$$
$$= 1 < 0$$

→ p.to di sella

Corso di Laurea in Informatica

I parziale di Analisi Matematica

22 Dicembre 2021

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Risultati

1.(pt.6)	
2.(pt.9)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni NON SARANNO VALUTATE.
È possibile scrivere sul retro dei fogli nel caso in cui lo spazio previsto per la risposta non sia sufficiente.

Esercizio 1(pt. 6)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^6)$,

- $\arctan(t) = t - t^3/3 + t^5/5 - t^7/7 + o(t^7)$

calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\arctan(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni, NELLA FORMA in cui saranno usati nel limite dato (con tutte le semplificazioni algebriche effettuate) e risolvere il limite assegnato:

- $\ln(1+x^2) =$

- $\ln(1+\arctan(x)) =$

.

Quindi:
$\ln(1+\arctan(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x =$

e infine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arctan(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x}{x^4} =$$

Esercizio 2(pt. 9)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}}.$$

I Disegnare il suo grafico (dominio di f, limiti ai bordi del dominio di f, zeri e segno della derivata prima).

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $K \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = K$ ha un'unica soluzione.

22 dicembre 2021

Esercizio 1(pt. 6)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^6)$,

- $\arctan(t) = t - t^3/3 + t^5/5 - t^7/7 + o(t^7)$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arctan(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni, NELLA FORMA in cui saranno usati nel limite dato (con tutte le semplificazioni algebriche effettuate) e risolvere il limite assegnato:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

sfruttiamo l'$o(x^4)$ per saltare molti calcoli nelle trasformazioni delle parentesi perché ci interessano solo i termini con il grado incognita ≤ 4

$$= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{4}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3\right) - \frac{1}{4}\left(x^4\right) + o(x^4)$$

$$= x - \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \cancel{\frac{1}{3}x^3} - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) - x + o(x^4)}{x^4} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{12}x^4 + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{4}x^4 - \cancel{x} + o(x^4)}{x^4} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{12}\,6}x^4 + o(x^4)}{x^4} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{6} + \cancel{o(1)}\right)}{\cancel{x^4}} = -\frac{1}{6}$$

22 dicembre 2021

Esercizio 2(pt. 9)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}}.$$

I Disegnare il suo grafico (dominio di f, limiti ai bordi del dominio di f, zeri e segno della derivata prima).

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

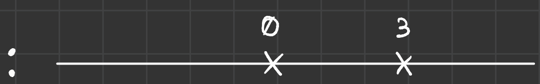
III Stabilire per quali $K \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = K$ ha un'unica soluzione.

$$\text{C.E.}: \quad x^2 - 3x \neq 0$$

$$x(x-3) \neq 0$$

$$x \neq 0 \wedge x \neq 3$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x+3}{x^2-3x} = \frac{x\left(3+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = N < D = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ x \to 0^+}} \frac{3x+3}{x^2-3x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3x+3}{x-3} = \frac{1}{0^-} \cdot \frac{\cancel{3}}{-\cancel{3}} = \frac{1}{0^-} \cdot -1$$

$$= -\infty \cdot -1 = +\infty$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 3^- \\ x \to 3^+}} \frac{3x+3}{x^2-3x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3x+3}{x-3} = \frac{1}{3^-} \cdot \frac{12}{0^-} = \frac{1}{3^-} \cdot -\infty = -\infty$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ x \to 3^+}} e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \to 3^-}} e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$f'(x) = \left[e^{\overbrace{\frac{3x+3}{x^2-3x}}^{g}} \right]'$$

$$= [e^g]' \cdot \left(\frac{[3x+3]' \cdot (x^2-3x) - (3x+3) \cdot [x^2-3x]'}{(x^2-3x)^2} \right)$$

$$= e^g \cdot \frac{3(x^2-3x) - (3x+3)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= e^g \cdot \frac{3x^2 \cancel{-9x} - 6x^2 \cancel{+9x} - 6x + 9}{(x^2-3x)^2}$$

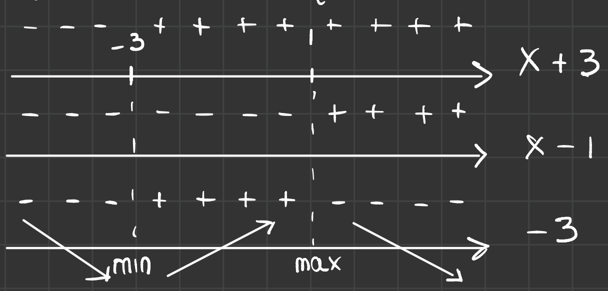
$$= e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}} \frac{-3(x^2+2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

discriminante $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \to$ ha due soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \qquad x_1 = -3 \quad x_2 = +1$$

$$= e^{\frac{3x+3}{x^2-3x}} \ {>0} \ \frac{\boxed{-3(x+3)(x-1)}}{(x^2-3x)^2} \ {>0}$$

$f'(x)$ si annulla per $x = -3$ e $x = 1$



cambia di segno

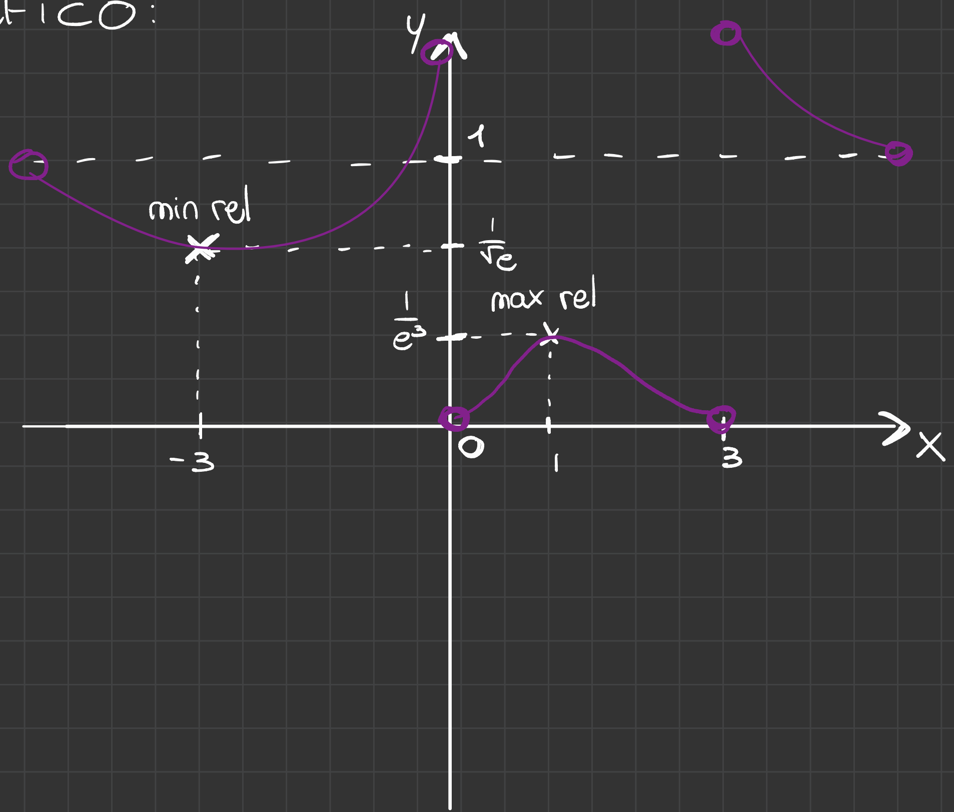
$$f(-3) = e^{-\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{18}_{3}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \rightarrow \left(-3, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

p.to min relativo

$$f(1) = e^{-\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{3} = \frac{1}{e^{3}} \rightarrow \left(1, \frac{1}{e^{3}}\right)$$

p.to max relativo

Grafico:



- $\mathrm{Im} f = \left]0, e^{-3}\right] \cup \left[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right[$
- $f(x) = K$ ha una sola soluzione per $K = e^{-3}, e^{-\frac{1}{3}}, 1$