Analisi I

Samuele Musiani

September 2022 - December 2022

Contents

1 Introduzione agli appunti

Non è mia intenzione dedicare molto spazio all'introduzione di questi appunti in quanto, più lunga diventa, più il rischio che nessuno la legga aumenta. Nonostante ciò ci sono alcune cose che vanno riportare.

La prima è **la natura di questi appunti**. Essi infatti vogliono essere un aiuto allo studio, ma più in generale vogliono cercare di dare le idee che risiedono dietro a molti argomenti e che purtroppo vengono tralasciate nella fretta di insegnare la materia. Ci sono quindi alcune sezioni dedicate interamente alla spiegazione di un concetto. Se uno lo conosce già può saltarle completamente e passare direttamente alla definizione formale. Nonostante ciò io consiglio di leggerlo, perché se si ha una idea di cosa si sta facendo diventa tutto più semplice.

La seconda è **potrebbero esserci degli errori**. In generale ho cercato di minimizzare gli errori rileggendo svariate volte, ma purtroppo non credo di essere riuscito nell'intento miracoloso di correggerli tutti. **Non mi assumo nessuna diretta responsabilità riguardo eventuali informazioni errate presenti all'interno di questi appunti**.

1.1 Le varie parti degli appunti

Ci sono vari box colorati che introducono rispettivamente una definizione, una dimostrazione, un lemma e una cosa importante:

Definizione

Questa è una definizione

Dimostrazione

Questa è una dimostrazione

Lemma

Questo è un lemma

Questa è una cosa importante

1.2 Segnalare errori e contribuire

Se per caso si trovano errori **vi prego di segnalarli ad uno dei contatti che seguono**. Se li segnalerete eviterete che altri studenti, nella lettura di questi appunti, imparino una informazione errata. Vi prego quindi di segnalarlo, ci mettete veramente poco tempo. Per quanto mi riguarda farò in modo di fixare quello che mi verrà riportato il prima possibile.

Se volete contribuire agli appunti con aggiunte, modifiche o suggerimenti potete scrivermi o mandare direttamente una *pull request* alla repository (link) sul mio profilo GitHub.

Email: samuele.musiani@studio.unibo.it

Telegram: @Tastier

Github: samuelemusiani

Ultima modifica: **July 11, 2024**

2 Insiemi

2.1 Simbologia

Per indicare gli insiemi si utilizzano lettere maiuscole (A, B, X, Y...). Per indicare gli elementi appartenenti ad un insieme si usano le lettere minuscole (a, b, x, y...). Di seguito una lista di simboli necessari per lavorare con gli insiemi e la logica in generale:

- $\in$ Appartiene
- $\notin$ Non appartiene
- $\forall$ Per ogni
- $:$ *or* $|$ Tale che
- $\exists$ Esiste (almeno)
- $\nexists$ Non esiste
- $\exists!$ Esiste ed è unico
- $\subseteq$ Inclusione insiemi
- $\subsetneq$ Inclusione stretta (cioè $A \subseteq B$ e $A \neq B$)
- $\nsubseteq$ Non incluso
- $\cup$ Unione
- $\cap$ Intersezione
- $\varnothing$ Insieme vuoto
- $\setminus$ Meno tra insiemi
- $\mathbb{U}$ Insieme universale
- $\complement(A)$ Complementare di A in $\mathbb{U}$, cioè tutti gli elementi di $\mathbb{U}$ che non sono in A ($\complement(A) = \mathbb{U} \setminus A$).
- $\vee$ OR logico
- $\wedge$ AND logico
- $\implies$ Implica
- $\iff$ Coimplica, ”se e solo se”

2.2 Proposizioni e utilizzo di simboli logici

Le **proposizioni** sono ”frasi” che hanno un valore di verità, cioè posso essere vere o false. Per legare due o più proposizioni si utilizzano svariati simboli logici. In generale la logica proposizionale si studia nel corso di logica quindi non ho intenzione di riportare più dello stretto necessario qui.

p	q	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\implies$ q
false	false	false	false	true
false	true	false	true	true
true	false	false	true	false
true	false	true	true	true

Table 1: Tabella di verità per AND, OR e IMPLICAZIONE

Nell'implicazione ($p \implies q$) p è condizione sufficiente per q, mentre q è condizione necessaria per p.

Se si vuole negare una proposizione si utilizza il simbolo di negazione ($^{-}$) oppure il classico $\neg$, quindi p negato risulta $\overline{p}$ oppure $\neg p$. Di seguito alcune negazioni di simboli generali:

- $\neg\forall = \exists$
- $\neg\exists = \forall$

Attenzione che i simboli $\nexists$ e $\neq \exists$ hanno significati diversi.

È interessante notare che se si ha un'implicazione, si negano entrambe le proposizioni e si scambiano i termini il risultato rimane invariato.

p	q	$p \implies q$	$\overline{q} \implies \overline{p}$
false	false	false	false
false	true	false	true
true	false	false	true
true	false	true	true

Table 2: Implicazione con termini negati e invertiti

Avendo la stessa tabella di verità $p \implies q = \overline{q} \implies \overline{p}$. Da qui nasce la **dimostrazione per negazione** (o contronominale). Esempio: se vogliamo dimostrare che se n^2 *è pari* allora n *è pari*, ci basta dimostrare che se n *è dispari* allora n^2 *è dispari*:

$$n \text{ dispari} \implies n^2 \text{ dispari}$$

Assumiamo che n sia dispari per dimostrare che n^2 è dispari. Per ipotesi:

$$\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$$

Ne consegue che:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Essendo $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$ ne consegue che:

$$2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ è dispari}$$

Qed.

2.3 Insiemi numerici noti

2.3.1 Naturali, interi e razionali

Il primo insieme che si introduce è l'insieme dei **numeri naturali**, indicato con $\mathbb{N}$. Non definiremo formalmente l'insieme, ci basti sapere che comprende tutti i numeri interi positivi. È generalmente scritto nella forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Il secondo insieme che va introdotto è quello dei **numeri interi**. Questo insieme comprende tutti i numeri che non hanno la virgola (per l'appunto interi) e si distingue da $\mathbb{N}$ in quanto ha al suo interno anche i numeri negativi. Il suo simbolo è $\mathbb{Z}$ e viene generalmente scritto come segue:

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

Non sempre però è comodo descrivere gli insiemi elencando il loro termini (in realtà non viene quasi mai fatto in quanto si creerebbero delle ambiguità). È necessario quindi utilizzare una notazione diversa per descrivere un insieme, ed è quello che si usa anche per introdurre $\mathbb{Q}$, l'insieme dei **numeri razionali**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

In questo caso l'insieme dei numeri razionali indica appunto l'insieme di tutte le frazioni[1]. E per esplicitarlo non cominciamo ad elencare tutte le frazioni, ma bensì utilizziamo una proposizione.

[1] Matematici rigorosi abbiate pietà della mia anima

2.3.2 Reali

L'ultimo insieme che introduciamo è l'insieme dei **numeri reali**. Viene indicato con il simbolo $\mathbb{R}$ ed è l'insieme più importante di tutti i precedenti. Questo insieme viene introdotto perché all'insieme dei numeri razionali ($\mathbb{Q}$) mancano dei numeri.

Proviamo infatti a prendere una retta e a inserirci tutti i numeri che conosciamo per ora (cioè quelli contenuti in Q). Costruiamo ora un quadrato di lato 1, e proviamo a calcolare la lunghezza della sua diagonale con il teorema di Pitagora. Il numero che otterremo sarà $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Se proiettiamo questo numero sulla retta vediamo chiaramente che esiste un punto che corrisponde a $\sqrt{2}$.

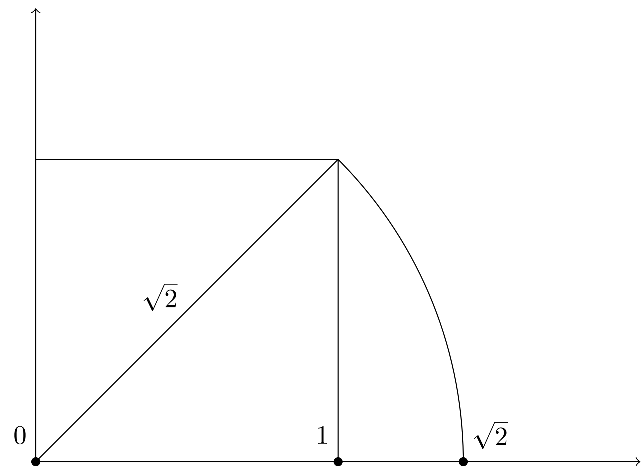


Figure 1: $\sqrt{2}$ derivata dalla lunghezza della diagonale di un quadrato

Questo punto è contenuto nell'insieme $\mathbb{Q}$?

Dimostrazione

Dobbiamo provare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Assumiamo che sia contenuto e riduciamoci a dimostrare l'assurdo. Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ significa che:

$$\exists\, m, n, \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

Cioè esistono due numeri appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che il loro rapporto è esattamente $\sqrt{2}$. Ovviamente essendo una frazione possiamo semplificare m e n fino ad eliminare tutti i loro fattori comuni, cioè fino a farli diventare **coprimi** o meglio M.C.D$(m, n) = 1$.

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \implies \frac{m^2}{n^2} = \sqrt{2} \implies m^2 = 2n^2$$

Possiamo quindi dedurre che m^2 è pari, e quindi m è pari[a]. Quindi $\exists\, k \in \mathbb{N} : m = 2k$.

$$m^2 = 2n^2 \implies (2k)^2 = 2n^2 \implies 4k^2 = 2n^2 \implies 2k^2 = n^2$$

Quindi se n^2 è pari, anche n è pari.

Abbiamo dimostrato che sia m che n sono pari, eppure avevamo imposto che m e n non avessero fattori in comune. Assurdo! Quindi:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Q.e.d.

[a]Lo abbiamo visto qualche pagina sopra come esempio di dimostrazione per negazione

Come abbiamo dimostrato $\sqrt{2}$ non appartiene all'insieme dei numeri razionali. Si può estendere quesa affermazione con il seguente teorema:

Teorema

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo, allora $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione

La dimostrazione è analoga al caso in cui $p = 2$. Si assume per assurdo che:

$$\exists m, n \in \mathbb{N} : \sqrt{p} = \frac{m}{n}$$

Assumiamo che m e n siano coprimi in quanto è sepre possibile semplificare fino a farli diventare coprimi. In altre parole M.C.D$(m, n) = 1$. Vale quindi che:

$$p = \frac{m^2}{n^2} \implies n^2 \cdot p = m^2$$

Tutti i fattori di m^2 sono i fattori di m, quindi p è un fattore di m. $\exists k \in \mathbb{N} : m = kp$. Sostituende risulta:

$$m^2 = p \cdot n^2 \implies (kp)^2 = p \cdot n^2 \implies k^2 \cdot p^2 = p \cdot n^2 \implies k^2 \cdot p = n^2$$

Per la stessa osservazione fatta prima, questo significa che p divide n. Ma dividendo anche m risulta che M.C.D$(m, n) = p$. Ed essendo p un numero primo $p \neq 1$. Assurdo! Quindi:

$$\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$$

Q.e.d.

Quindi tutti i numeri primi non appartengono all'insieme dei numeri razionali. Ma quanti numeri primi esistono?

Teorema

I numeri primi sono infiniti

Dimostrazione

La dimostrazione è per assurdo quindi supponiamo che i numeri primi siano finiti. Elenchiamoli in ordine crescente:

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n$$

Definiamo ora il numero: $m := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Facciamo vedere che m produce una contraddizione: $m > p_n$ quindi essendo p_n il massimo numero primo m deve per forza essere non primo. Essendo non primo m deve per forza essere divisibile per almeno uno dei numeri primi $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Notiamo però che preso un qualsiasi primo p_i, m darà sempre resto 1:

$$m = p_i \cdot (p_1 \cdots p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdots p_n) + 1$$

Non essendo quindi divisibile per nessuno dei numeri primi m deve per forza essere primo, ma questo è assurdo in quanto m non era primo per l'osservazione fatta in precedenza. Q.e.d.

Ne consegue che esistono infiniti punti sulla retta che non appartengono a $\mathbb{Q}$, e anzi è molto più probabile che facendo la radice di un numero si ottenga un numero che non è incluso in $\mathbb{Q}$ piuttosto che il contrario. Quindi se si vuole formalizzare una teoria dei limiti è necessario lavorare su un insieme non ”bucato”, cioè un insieme **continuo**.

La proprietà che infatti distingue e differenzia $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ è proprio la continuità (non ci sono ”buchi”) e la completezza (tutti i punti sulla retta hanno associato un unico numero reale). Esiste infatti una **corrispondenza biunivoca** che associa tutti i punti della retta ai numeri reali.[2] Per definire meglio la proprietà di completezza è necessario introdurre alcuni concetti:

Definizione

Dato $A \neq \varnothing$ e $A \subseteq R$

1. $M \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di A se: $\forall\, a \in A : a \leqslant M$.
2. $m \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di A se: $\forall\, a \in A : m \leqslant a$.
3. Se A ammette un maggiorante è **superiormente limitato**.
4. Se A ammette un maggiorante è **inferiormente limitato**.
5. Se A ammettere un maggiorante e un minorante è **limitato**.
6. $b \in A$ si dice **massimo** di A se $\forall\, a \in A : a \leqslant b$.
7. $c \in A$ si dice **minimo** di A se $\forall\, a \in A : c \leqslant a$.
8. Il più piccolo dei maggioranti si chiama **estremo superiore** di A. Si indicato con $\mathbf{sup}\, A$. Se il massimo esiste coincide con l'estremo superiore. Se l'insieme è superiormente illimitato si scrive $\mathbf{sup}\, A = +\infty$.
9. Il più grande dei minoranti si chiama **estremo inferiore** di A. Si indicato con $\mathbf{inf}\, A$. Se il minimo esiste coincide con l'estremo inferiore. Se l'insieme è inferiormente illimitato si scrive $\mathbf{inf}\, A = -\infty$.
10. L'**insieme dei maggioranti** di A si indica come $\mathrm{Mg}(A) = \{n \in \mathbb{R} \,|\, n \text{ è un maggiorante di } A\}$. Il minimo di questo insieme coincide con l'estremo superiore di A.
11. L'**insieme dei minoranti** di A si indica come $\mathrm{Mn}(A) = \{n \in \mathbb{R} \,|\, n \text{ è un minorante di } A\}$. Il massimo di questo insieme coincide con l'estremo inferiore di A.

La proprietà di **completezza** di $\mathbb{R}$ è quindi formalizzata nella seguente forma:

Dato un insieme limitato, esiste sempre un estremo inferiore e un estremo superiore.

Per esempio, dato l'insieme $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 < 2\}$ non è possibile trovare un estremo superiore e un estremo inferiore in quanto l'intervallo (sezione 2.4) dell'insieme sarebbe $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ e, come dimostrato precedentemente, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Se invece si considera l'insieme $B = \{q \in \mathbb{R} \,|\, q^2 < 2\}$, è facile notare che $\sup A = \sqrt{2}$ e che $\inf A = -\sqrt{2}$.

2.4 Intervalli

Per indicare gli intervalli generalmente si utilizza una notazione con le parentesi. Viene utilizzata la parentesi quadra ([e]) per indicare rispettivamente se un estremo dell'intervallo è compreso o no. In particolare se l'apertura della parentesi è rivolta verso il numero, allora tale numero è compreso. Di

[2] Per approfondire il concetto di *corrispondenza biunivoca* è necessario fare riferimento al capitolo legato alle funzioni.

seguito degli esempi per chiarire. Gli intervalli sono comunque un insieme di punti e quindi questo si può tradurre:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\}$
- $[b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant b\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Con infinito si utilizza sempre la parentesi di esclusione. In alcuni libri viene utilizzata però la parentesi tonda: al posto di $[a, +\infty[$ viene scritto $[a. + \infty)$. La notazione è del tutto equivalente.

2.5 Prodotto cartesiano

Definizione

Dati due insiemi A e B, il **prodotto cartesiano tra A e B** si definisce come:

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$$

È quindi l'insieme di coppie ordinate $((1, 0) \neq (0, 1))$. Attenzione che non vale la proprietà commutativa: $A \times B \neq B \times A$. Un prodotto cartesiano con lo stesso insieme si può abbreviare come $A^2 = A \times A$.

$\mathbb{R}$ = Retta. $\mathbb{R}^2$ = Piano cartesiano. $\mathbb{R}^3$ = Sistema di coordinate a tre dimensioni.

2.6 Cardinalità

La cardinalità, per essere introdotta, ha bisogno di alcune nozioni riguardo le funzioni. È consigliato quindi andare a vedere la sezione 3 e poi tornare qui.

Definizione

Dati due insiemi A e B, se esiste una funzione biunivoca $f : A \to B$ si dice che **A e B sono equipotenti**.

Definizione

Due insiemi hanno la stessa cardinalità se sono equipotenti. Per indicare la cardinalità dell'insieme A si scrive:

$$|A|$$

La cardinalità, in parole povere, è un modo per "misurare" e classificare gli insiemi in base a quanti elementi contengono. Se infatti abbiamo tre insiemi finiti $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 2\}$ possiamo dire che A e C NON hanno la stessa cardinalità ($|A| = 3 \neq |C| = 2$), mentre A e B hanno la stessa cardinalità ($|A| = |B| = 3$). Quindi la cardinalità riguardo insiemi *finiti* si limita a misurare gli elementi che contengono gli insiemi stessi, mentre la cardinalità con insiemi *infiniti* ci permette di capire quali insiemi contengono più elementi di altri (nonostante siano infiniti).

2.6.1 Cardinalità del numerabile

La cardinalità infinita più piccola è la **cardinalità del numerabile**, cioè la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali ($|\mathbb{N}| = numerabile$).

Ora prendiamo in considerazione il secondo insieme che abbiamo introdotto subito dopo $\mathbb{N}$, cioè $\mathbb{Z}$. L'intuito ci dice che la cardinalità dell'insieme dei numeri interi dovrebbe essere doppia rispetto a quella dei naturali, in quanto ci sono esattamente il doppio dei numeri (cioè anche i negativi oltre ai positivi). Proviamo però a definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tale che:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

I valori della funzione risultano quindi:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0 & f(1) = -1 \\ f(2) = 1 & f(3) = -2 \\ f(4) = 2 & f(5) = -3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

È facile notare che f è biunivoca e, conseguentemente alle definizioni appena date, possiamo affermare che $\mathbb{Z}$ ha cardinalità del numerabile:

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$$

Prendiamo ora in analisi l'insieme dei numeri razionali, ovvero $\mathbb{Q}$. Elenchiamo tutte le frazioni (e di conseguenza tutti i suoi elementi) nel seguente ordine:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & ... \\ \text{-}0 & \text{-}1 & \text{-}2 & \text{-}3 & \text{-}4 & \text{-}5 & \text{-}6 & ... \\ +\frac{0}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{2}{2} & +\frac{3}{2} & +\frac{4}{2} & +\frac{5}{2} & +\frac{6}{2} & ... \\ -\frac{0}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{6}{2} & ... \\ +\frac{0}{3} & +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{3}{3} & +\frac{4}{3} & +\frac{5}{3} & +\frac{6}{3} & ... \\ -\frac{0}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{6}{3} & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Figure 2: Tabella numeri razionali

Non dimostreremo rigorosamente la cosa, però è facile notare che si può costruire una funzione biunivoca da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ che segua esattamente l'ordine delle frecce nella figura 2. Di conseguenza anche l'insieme dei numeri razionali ha **cardinalità del numerabile**:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

2.6.2 Cardinalità del continuo

Concludiamo con l'analisi dei numeri reali, ovvero l'insieme $\mathbb{R}$. Se volessimo dimostrare che $\mathbb{R}$ non è numerabile, ci basterebbe dimostrare che un suo sottoinsieme non è numerabile.

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che $[0,1[$ non è numerabile perché questo ci permetterebbe di concludere che $\mathbb{R}$ non è numerabile. Ci basta quindi dimostrate che non esiste una funzione suriettiva da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$$\nexists f : N \xrightarrow[1-1]{SU} [0,1[$$

Supponiamo che esiste tale funzione e riduciamoci a dimostrare l'assurdo[a]. Essendo la funzione suriettiva, ogni numero nell'intervallo $[0,1[$ deve avere una corrispondenza in $\mathbb{N}$.

$$f(n) \in [0,1[$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, b_{00}\ b_{01}\ b_{02}\ b_{03}\ b_{04}\ b_{05} \cdots \\
f(1) &= 0, b_{10}\ b_{11}\ b_{12}\ b_{13}\ b_{14}\ b_{15} \cdots \\
f(2) &= 0, b_{20}\ b_{21}\ b_{22}\ b_{23}\ b_{24}\ b_{25} \cdots \\
f(3) &= 0, b_{30}\ b_{31}\ b_{32}\ b_{33}\ b_{34}\ b_{35} \cdots \\
f(4) &= 0, b_{40}\ b_{41}\ b_{42}\ b_{43}\ b_{44}\ b_{45} \cdots \\
f(5) &= 0, b_{50}\ b_{51}\ b_{52}\ b_{53}\ b_{54}\ b_{55} \cdots \\
&\vdots \\
f(n) &= 0, b_{n0}\ b_{n1}\ b_{n2}\ b_{n3}\ b_{n4}\ b_{n5} \cdots
\end{aligned}$$

Ci basta ora trovare un numero $r \in [0,1[$ tale che: $f(n) \neq r \ \forall n \in \mathbb{N}$ per provare l'assurdo. Costruiamo il numero r usando un procedimento diagonale[b]:

$$r := 0, r_0\ r_1\ r_2\ r_3\ r_4 \cdots$$

$$r_j = \begin{cases} 5 & \text{se } b_{jj} \neq 5 \\ 6 & \text{se } b_{jj} = 5 \end{cases}$$

La costruzione è in diagonale perché consideriamo come indici della b solo la coppia jj, che quindi produce uno spostamento regolare $00, 11, 22, \cdots$. In pratica prendiamo una cifra da ogni numero che abbiamo già e la cambiamo. In questo modo tutti i numeri che abbiamo differiranno di almeno una cifra da quello che stiamo costruendo. Questa particolare costruzione implica che:

$$r_j \neq b_{jj} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Nonostante ciò $r \in [0,1[$. Abbiamo quindi provato l'assurdo in quanto:

$$r \neq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

E quindi la funzione non è suriettiva. Qed.

[a] Il prof chiama questa dimostrazione *una dimostrazione per assurdo* quando chiaramente non lo è perché si suppone l'esistenza della funzione da una semplice introduzione del not. La differenza tra la dimostrazione per assurdo (RAA) e la not introduzione sarà chiara soltanto quando farete deduzione naturale nel corso di logica. Fino ad allora fregatevene di questa distinzione. La prova comunque non è per assurdo, dando ragione al sommo CSC quando dice che "*i matematici si confondono sempre sulle dimostrazioni per assurdo*".

[b] Questo procedimento esiste grazie al matematico Cantor.

Quindi $|\mathbb{R}|$ non è numerabile, infatti: $\mathbb{R}$ ha **cardinalità del continuo**.

3 Funzioni

Definizione

Dati due insiemi $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, una **funzione** f da A a B

$$f : A \to B$$

è una corrispondenza univoca da A a B. Ovvero associa ad ogni $x \in A$ uno e un solo $y \in B$. Tale elemento è il **valore della funzione** in x e si scrive.

$$f(x) = y$$

Questa associazione di un elemento di A ad un elemento di B è data dalla **legge di associazione**:

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : f(x) = y$$

L'insieme A è il **dominio** della funzione, mentre l'insieme B è il **codominio** della funzione. L'insieme dei valori di una funzione è invece l'**immagine** (si ottiene proiettando la funzione sull'asse y):

$$\mathrm{Im} f = \{y \in B \,|\, \exists x \in A : f(x) = y\}$$

Una funzione può essere anche chiamata *corrispondenza* oppure *mappa*. Essa è definita quindi da tre cose:

1. Un **dominio**
2. Un **codominio**
3. Una **legge di associazione**

Affinché due funzioni siano uguali, il dominio, il codominio e la legge di associazione devono corrispondere. In altri termini date due funzioni $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, le funzioni risultano uguali se e solo se:

$$\begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ f = g \end{cases}$$

Esempio: data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $g(x) = x^2$, le due funzioni sono diverse in quanto la seconda ha un codominio diverso dalla prima ($\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant x\}$).

Il **dominio naturale** di una funzione è il più grande sottoinsieme in cui quella funzione è definita.

3.1 Funzione iniettiva (1-1)

Definizione

Una funzione $f : A \to B$ è detta iniettiva se e solo se:

$$\forall x, y \in A : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

o equivalentemente:

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \implies x = y$$

Spesso l'iniettività di una funzione viene più brevemente indicata con (1-1). Inoltre questa proprietà dipende strettamente da come viene "scelto il dominio":

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^3 & \text{È iniettiva} \\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^2 & \text{Non è iniettiva} \\ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^2 & \text{È iniettiva} \end{array}$$

La seconda funzione infatti non è iniettiva ($f(-2) = f(2) = 4$), mentre la terza lo è in quanto il dominio è stato ristretto.

3.2 Funzione suriettiva (Su)

Definizione

Una funzione $f : A \to B$ è detta suriettiva se e solo se:

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Spesso la suriettività di una funzione viene più brevemente indicata con (Su). Inoltre questa proprietà dipende strettamente da come viene "scelto il codominio":

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^3 & \text{È suriettiva} \\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^2 & \text{Non è suriettiva} \\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \;\; f(x) = x^2 & \text{È suriettiva} \end{array}$$

La seconda funzione infatti non è iniettiva ($f(x) = -2$ non ha soluzione per esempio), mentre la terza lo è in quanto il codominio è stato ristretto.

3.3 Funzione biunivoca

Definizione

Una funzione viene detta **biunivoca** (o biettiva) se è **iniettiva (1-1)** e **suriettiva (Su)**.

Le funzioni biunivoche sono molto importanti perché ci permettono di definire le funzioni inverse. In pratica se una funzione ha questa proprietà significa che ad un elemento del codominio è associato uno e un solo elemento del dominio, ed inoltre tutti gli elementi del codominio hanno un corrispettivo nel dominio: in pratica l'immagine coincide con il codominio.

3.4 Funzione invertibile

Le funzioni inverse sono tutte quelle funzioni che ci permettono di passare da un elemento nell'immagine di un'altra funzione al valore associato ad esso nel dominio. Alcuni esempi di funzioni e il loro inverso (che vedremo più avanti) sono il *seno* e *arcoseno*, *esponenziale* e *logaritmo*, *potenze* e *radici*, ecc. Non tutte le funzioni sono invertibili, anzi molto poche perché una funzione, affinché risulti invertibile, è necessario che sia **biunivoca**.

Definizione

Una funzione $f : A \to B$ si dice **invertibile** se $\exists\, f^{-1} : B \to A$ tale che:

$$\forall a \in A : f^{-1}(f(a)) = a$$
$$\forall b \in B : f(f^{-1}(b)) = b$$

3.5 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$:

1. f si dice **crescente** (o **monotona**) se:

   $$\forall x, y \in I : x < y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

   Se al posto del *minore o uguale* ($\leqslant$) avessimo usato un *minore stretto* ($<$) la proprietà era più forte, e in quel caso la funzione sarebbe stata **strettamente crescete**.

2. f si dice **decrescente** (o **monotona decrescente**) se:

   $$\forall x, y \in I : x < y \implies f(x) \geqslant f(y)$$

   Se al posto del *maggiore o uguale* ($\geqslant$) avessimo usato un *maggiore stretto* ($>$) la funzione sarebbe stata **strettamente decrescete**.

3.6 Funzioni pari e dispari

Un modo per classificare una funzione è vedere se è pari, dispari, o nessuna delle due. Ne consegue che non per forza una funzione deve essere pari o dispari. E inoltre se una funzione non è pari non è detto che sia dispari.

Definizione

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, se:

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in A \tag{1}$$

La funzione si dice **pari**. Mentre se:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in A \tag{2}$$

La funzione si dice **dispari**.

La nomenclatura pari o dispari deriva dalle potenze, in quanto $(-a)^n = a^n$ se n è pari, mentre $(-a)^n = -a^n$ se n è dispari.

Le funzioni pari hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

3.7 Valore assoluto

Definizione

Dato un numero $a \in \mathbb{R}$ si dice **valore assoluto di** a:

$$|a| := \max(a, -a)$$

Il valore assoluto si espande nel seguente modo:

- $|a| \leqslant b \quad \text{con } b > 0 \iff -b \leqslant a \leqslant b$
- $|a| \geqslant b \quad \text{con } b > 0 \iff a \leqslant -b \vee a \geqslant b$

Alcune proprietà del valore assoluto:

1. $|a| \geqslant 0$
2. $|a| = 0 \iff a = 0$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

3.8 Fattoriale

Definizione

Dato un numero $n \in \mathbb{N}$, il **fattoriale** di n è definito:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-1) \cdot n & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

oppure in maniera ricorsiva:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Il fattoriale è solo una notazione introdotta per evitare di scrivere moltiplicazioni ripetute di numeri naturali. Se si ha un insieme di n oggetti distinti il fattoriale rappresenta il numero di possibili permutazioni di quegli oggetti.

3.9 Coefficiente binomiale

Definizione

Dati due numeri $n, m \in \mathbb{N} : m \leqslant n$ si definisce **coefficiente binomiale**:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ \dfrac{n!}{(n-m)!m!} & \text{se } m \geqslant 1 \end{cases}$$

Un modo per ricordarselo è pensare che il coefficiente binomiale di n su m rappresenta il numero di sottoinsiemi di m elementi in un insieme di n elementi.

Gode delle seguenti proprietà:

$$1) \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$2) \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

3.9.1 Coefficiente binomiale generalizzato

Dato il coefficiente binomiale appena definito:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad m = 0 \\ \dfrac{n!}{(n-m)!m!} & \text{se} \quad m \geqslant 1 \end{cases}$$

Il caso $m \geqslant 1$ è possibile riscriverlo come segue:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

Questo permette di togliere l'operazione fattoriale dal primo argomento e quindi permette di generalizzare la sua definizione a $n \in \mathbb{R}$. In questo caso si parla di coefficiente binomiale generalizzato (con $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\binom{\alpha}{m} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} & \text{se} \quad \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

3.10 Binomio di Newton

Il binomio di Newton è metodo per esprimere lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi mediante una formula.

3.10.1 Sommatoria

Prima però di introdurlo è necessario introdurre una notazione spesso usata in matematica per scrivere in maniera più agevole somme di un certo numero di addendi:

Definizione

La **sommatoria** si indica con la lettera sigma maiuscola (Σ), prevede un indice (generalmente i, j o k), un'espressione algebrica a destra della lettera sigma in cui viene usato l'indice e due valori per l'indice: uno di partenza e l'altro di terminazione, rispettivamente indicati sotto e sopra sigma. La notazione generale diventa quindi:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Da notare che la sommatoria espande il termine $f(k)$ sostituendo a k ogni singolo numero naturale compreso tra m ed n per poi sommare tutti i termini insieme. **È necessario quindi che $\mathbf{m \leqslant n}$**.

3.10.2 Binomio di Newton (effettivo)

L'idea alla base del binomio di Newton è cercare di trovare una formula che semplifichi lo sviluppo in potenza di un binomio qualsiasi. Esiste quindi un modo per sviluppare $(a+b)^n$ senza dover per forza fare tutte le moltiplicazioni intermedie? Proviamo ad elencare gli sviluppi del binomio per i primi valori di n:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ &\vdots\end{aligned}$$

Tralasciando momentaneamente i coefficienti è facile notare un certo schema nelle potenze di a e di b:

$$(a+b)^n = a^nb^0 + a^{n-1}b^1 + \cdots + a^1b^{n-1} + a^0b^n$$

Per i coefficienti non faremo la dimostrazione ma sono legati al coefficiente binomiale (Sezione 3.9), infatti:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{2}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{0}b^2 =\\ &= \frac{2!}{(2-2)!2!}a^2 + \frac{2!}{(2-1)!1!}ab + \frac{2!}{(2-0)!0!}b^2 =\\ &= 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2\end{aligned}$$

Di conseguenza il caso generale diventa:

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^nb^0 + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{0}a^0b^n =$$

Introducendo la notazione di sommatoria (3.10.1) per semplificare e utilizzando qualche proprietà del coefficiente binomiale (3.9):

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Definizione

Il **binomio di Newton** esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi mediante la formula:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

3.11 Radice aritmetica

Teorema

La radice di un numero reale positivo esiste sempre ed è unica:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \exists! b \in \mathbb{R}_+ : b^n = a$$

b si chiama radice **aritmetica n-esima** di a e si scrive $\sqrt[n]{a} := b$. In quanto $b \in \mathbb{R}_+$ la radice aritmetica è **sempre positiva**.

Dimostriamo il teorema della radice n-esima semplificato, cioè solo per il caso in cui $n = 2$. Prima però è necessario dimostrare un lemma:

Lemma

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x, y \geqslant 0$

A) $x^2 \leqslant y^2 \iff x \leqslant y$

B) $x^2 \geqslant y^2 \iff x \geqslant y$

C) $x^2 = y^2 \iff x = y$

D) $x^2 < y \implies \exists \epsilon > 0 : (x + \epsilon)^2 < y$

E) $x^2 > y \implies \exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon)^2 > y \quad$ con $x > 0$

Dimostrazione: assumiamo come ipotesi generale che: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x, y \geqslant 0$.

(A) Vogliamo dimostrare che
$$x^2 \leqslant y^2 \iff x \leqslant y$$
$$\begin{aligned} &x^2 \leqslant y^2 \\ &x^2 - y^2 \leqslant 0 \\ &(x + y)(x - y) \leqslant 0 \end{aligned}$$
Ovviamente essendo $x, y \geqslant 0 \implies x+y \geqslant 0$, l'unico modo per cui l'espressine sia negativa è che il secondo termine sia negativo:
$$\begin{aligned} x - y &\leqslant 0 \\ x &\leqslant y \end{aligned}$$

(B) La dimostrazione di questo punto è identica al precedente, di conseguenza non verrà riportata.

(C) Vogliamo dimostrare che
$$x^2 = y^2 \iff x = y$$
Dai due punti precedenti:
$$x^2 = y^2 \iff \begin{cases} x^2 \leqslant y^2 \iff x \leqslant y \\ x^2 \geqslant y^2 \iff x \geqslant y \end{cases} \iff x = y$$

(D) Vogliamo dimostrare che:
$$x^2 < y \implies \exists \epsilon > 0 : (x + \epsilon)^2 < y$$
Assumiamo $x^2 < y$ per dimostrare:
$$\exists \epsilon > 0 : (x + \epsilon)^2 < y$$
Prendiamo $0 < \epsilon < 1$ in modo che $\epsilon^2 < \epsilon$:
$$(x + \epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2$$

Sostituendo ora ϵ^2 con ϵ possiamo affermare che:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 \leqslant \\ \leqslant x^2 + 2x\epsilon + \epsilon = \\ = x^2 + \epsilon(2x+1) \end{aligned}$$

È possibile ora scegliere ϵ in modo da soddisfare $x^2 + \epsilon(2x+1) < y$?

$$\begin{aligned} x^2 + \epsilon(2x+1) < y \\ \epsilon(2x+1) < y - x^2 \\ \epsilon < \frac{y - x^2}{2x+1} \end{aligned}$$

Si ricorda che $(2x+1) > 0$ per ipotesi generale ($x \geqslant 0$). Anche $y - x^2 > 0$ per ipotesi, quindi è possibile scegliere ϵ in maniera tale da verificare:

$$0 < \epsilon < \frac{y - x^2}{2x+1}$$

(E) Vogliamo dimostrare, sotto l'ipotesi aggiuntiva $x > 0$, che:

$$x^2 > y \implies \exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon)^2 > y$$

Assumiamo $x^2 > y$ per dimostrare:

$$\exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon)^2 > y$$

Espandiamo il quadrato:

$$(x - \epsilon)^2 = x^2 - 2x\epsilon + \epsilon^2$$

Essendo $\epsilon^2 > 0$ e dovendo dimostrare un maggiore possiamo anche toglierlo in quanto se $x^2 - 2x\epsilon > y$ sicuramente $x^2 - 2x\epsilon + \epsilon^2 > y$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\epsilon &> y \\ x^2 - y &> 2x\epsilon \\ 2x\epsilon &< x^2 - y \\ \epsilon &< \frac{x^2 - y}{2x} \end{aligned}$$

Per ipotesi $x > 0$ e $x^2 - y > 0$. È quindi possibile scegliere un ϵ affinché la tesi si verifichi:

$$0 < \epsilon < \frac{x^2 - y}{2x}$$

Qed.

Dimostrazione

Torniamo ora alla nostra dimostrazione principale. Vogliamo dimostrare che (visto che ci siamo ridotti solo al caso $n = 2$):

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists! b \in \mathbb{R}_+ : b^2 = a$$

Utilizzando la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ (Sezione: 2.3.2) definiamo un insieme A tale che:

$$A = \{c \in \mathbb{R} | c \geqslant 0 \wedge c^2 \leqslant a\}$$

Visto che $0 \in A \implies A \neq \varnothing$.

$$\forall c \in A : c^2 \leqslant a \leqslant (a+1) \leqslant (a+1)^2$$

Da lemma **A** $\implies c \leqslant a + 1$. $a + 1$ quindi è un *maggiorante* di A e conseguentemente A è *superiormente limitato*. Dalla proprietà di completezza:

$$\exists \ \sup A =: b \in \mathbb{R}_+$$

Ci riduciamo quindi a dimostrare che $b^2 = a$, cosicché $\sqrt{a} = b$. Assumiamo per assurdo che $b^2 \neq a$, di conseguenza $b^2 < a \vee b^2 > a$. Procediamo quindi per casi su questa ipotesi:

1. Caso $b^2 < a$: Dal lemma **D**:

   $$\exists \epsilon > 0 : (b+\epsilon)^2 < a \implies b + \epsilon \in A \implies b + \epsilon \leqslant \sup A = b \implies \epsilon \leqslant 0$$

   Assurdo!

2. Caso $b^2 > a$: Da lemma **E**:

   $$\exists \epsilon > 0 : (b-\epsilon)^2 > a \implies \forall c \in A : c^2 \leqslant a < (b-\epsilon)^2 \implies c^2 \leqslant (b-\epsilon)^2$$

   Da lemma **A**:

   $$c \leqslant b - \epsilon \quad \forall c \in A$$

   Questo implica che $b - \epsilon$ sia un *maggiorante* di A. Ma $b = \sup A$ e $b - \epsilon$ è un maggiorante ancora più piccolo. **Assurdo!**

Quindi $b^2 = a$.

Proviamo ora l'unicità della radice. Supponiamo $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$b_1^2 = a = b_2^2 \implies b_1^2 = b_2^2$$

Da lemma **C**: $b_1 = b_2$

Q.e.d.

Facciamo alcune osservazioni:

- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

La radice si riscrive molto facilmente come una potenza. Infatti: $b^n = a \implies (b^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \implies b = a^{\frac{1}{n}}$.

Ma essendo b la radice di a:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Si ricava con lo stesso procedimento che:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

3.12 Funzioni goniometriche

3.12.1 Introduzione

L'idea alla base goniometria nasce da quella che viene chiama **circonferenza goniometrica**. Questa circonferenza non ha nulla di speciale se non avere il *centro nell'origine* degli assi cartesiani e avere *raggio 1*. In particolare il suo grafico sarà:

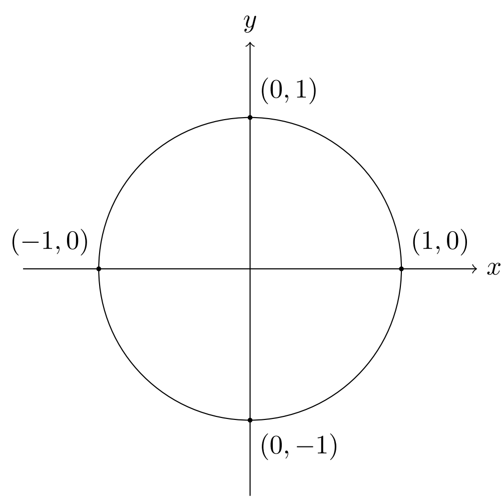


Figure 3: Circonferenza goniometrica

E l'equazione associata sarà:

$$x^2 + y^2 = 1$$

L'idea ora è di tracciare un raggio qualsiasi nella circonferenza, e indicare con $P(x_p, y_p)$ il punto in cui tocca la circonferenza. Ovviamente il raggio formerà un angolo rispetto all'asse delle ascisse che chiameremo per comodità α. E ora arriva la domanda che ci poterà inevitabilmente alle funzioni goniometriche: *è possibile trovare x_p e y_p soltanto sapendo α?*

3.12.2 Radianti

Prima di continuare con le funzioni goniometriche è necessario fare alcune precisazioni sugli angoli. Infatti l'unità di misura che si è sempre adottata per misurare gli angoli è il grado sessagesimale (30°, 180°, 90° ...), ma questa, nonostante sia molto intuitiva, risulta poco pratica per indicare gli angoli. I matematici hanno quindi deciso di introdurre una nuova misura, chiamandola **radianti**.

L'idea alla base dei radianti è utilizzare una circonferenza: data infatti una circonferenza con centro nel vertice dell'angolo è facile notare che quest'ultimo delimita sulla circonferenza stessa un arco. L'angolo in radianti è definito proprio dal **rapporto tra l'arco intercettato dall'angolo e il raggio della circonferenza**.

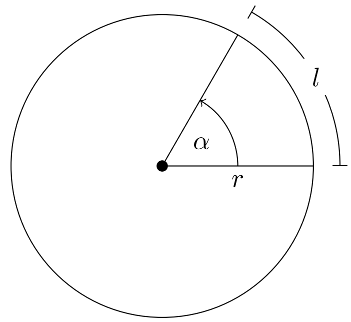


Figure 4: Definizione dell'angolo in radianti

$$\alpha_{rad} = \frac{l}{r}$$

In realtà, nonostante i radianti semplifichino di molto gli angoli, questa definizione sembra effettivamente molto più complessa dei semplici gradi. Se però si comincia a fare qualche osservazione è facile vedere la bellezza dietro a questa misurazione degli angoli:

1. La prima osservazione è notare che questa definizione **non dipende dal raggio** della circonferenza. Proviamo infatti a calcolare l'angolo giro in radianti:

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

2. La seconda osservazione è che un angolo espresso in radianti **è un numero puro** (cioè non ha unità di misura), in quanto rapporto di due lunghezze.

3. La terza osservazione si basa sul girare la formula è arrivare a $l = \alpha_{\text{rad}} \cdot r$. In questo caso è facile vedere che avendo l'angolo e il raggio è possibile determinare la lunghezza dell'arco di circonferenza. Ma in una circonferenza goniometrica (dove per definizione il raggio è 1) **l'angolo è uguale alla misura dell'arco di circonferenza che intercetta**.

È abbastanza immediato ricavare una proporzione per convertire gli angoli da radianti a gradi:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \alpha_{rad} : 2\pi$$

Riporto di seguito gli angoli più usati sia in gradi che in radianti:

0°	0
$30\circ$	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

3.12.3 Convenzione sul segno degli angoli

Esiste una convezione per indicare gli angoli sulla circonferenza goniometrica. Gli angoli si iniziano a contare dalla semiretta positiva dell'asse delle ascisse e se ci muoviamo in senso antiorario gli angoli aumentano, mentre se ci muoviamo in senso orario gli angoli diminuiscono. Questo è importante perché sulla circonferenza goniometrica è possibile rappresentare anche angoli negativi. Per esempio $-\frac{\pi}{4}$ è un angolo ampio $\frac{\pi}{4}$, ma si trova nel quarto quadrante invece che nel primo.

3.12.4 Seno, coseno e tangente

Eravamo rimasti a cerca di calcolare le coordinate di un punto P che giace sulla circonferenza goniometrica dato semplicemente l'angolo. È proprio da questo problema quindi che nascono le funzioni goniometriche:

Definizione

Dato un angolo α formato da un raggio sulla circonferenza goniometrica e indicato con $P(x_p, y_p)$ l'estremo del raggio che non è il centro della circonferenza, definiamo:

$$\sin\alpha := y_p$$
$$\cos\alpha := x_p$$

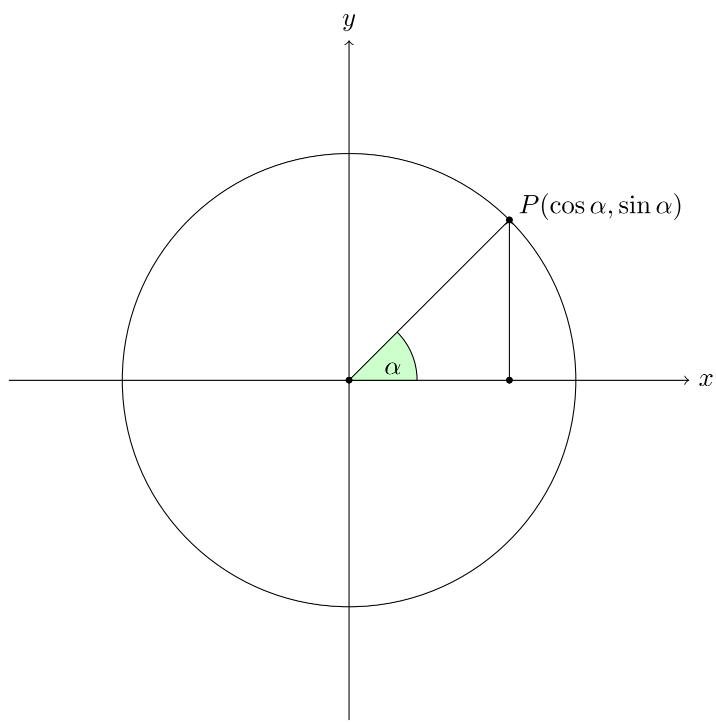


Figure 5: Definizione tangente

Grazie quindi alla funzione **seno** e alla funzione **coseno** possiamo calcolare le coordinate di qualsiasi punto sulla circonferenza goniometrica sapendo semplicemente l'angolo che il punto forma con la semiretta positiva dell'asse delle ascisse.

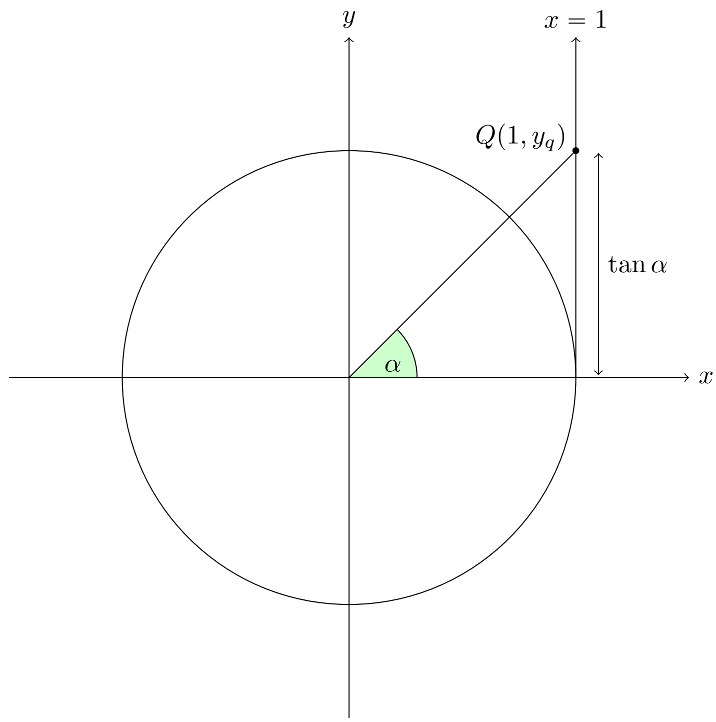


Figure 6: Definizione tangente

Proviamo a fare alcuni esempi: se volessimo calcolare le coordinate del punto che forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ ci basterebbe calcolare per l'ascissa $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e per l'ordinata $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Il punto infatti ha coordinate $(0, 1)$.

Oltre al seno e al coseno esiste un'ulteriore funzione goniometrica chiamata **tangente**. La definizione geometrica della tangente richiede l'introduzione di una retta di equazione $x = 1$. Una retta quindi verticale tangente alla circonferenza nel punto $(1, 0)$. Se proviamo ora a prendere un qualsiasi punto su questa retta e a tracciare un segmento che collega il punto al centro della circonferenza delimitiamo un angolo. La tangente di questo angolo sarà l'ordinata del punto.

Definizione

Preso un punto $Q(1, y_q)$ qualsiasi sulla retta $x = 1$ tangente alla circonferenza goniometrica in $(1, 0)$, tracciando il segmento che ha come estremi il punto e il centro della circonferenza si trova un angolo α. La *tangente* di quell'angolo è l'ordinata del punto Q:

$$\tan\alpha := y_q$$

3.12.5 Identità fondamentali

Esistono due identità fondamentali nella goniometria. La prima si ricava dalla formula stessa della circonferenza goniometrica ($x^2 + y^2 = 1$). Essendo infatti $x = \cos t$ e $y = \sin t$ possiamo scrivere:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Per la seconda bisogna fare qualche piccolo traffico geometrico che verrà tralasciato. Si noti però che questa NON è la definizione della tangente ma solo una conseguenza.

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

3.12.6 Dominio, codominio e immagine

Il dominio di seno e coseno è $\mathbb{R}$, il codominio è $[-1, 1]$.
Il dominio della tangente è $Dom(\tan) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$, il codominio è $\mathbb{R}$.

3.12.7 Periodicità e parità delle funzioni goniometriche

Il seno, il coseno e la tangente sono funzioni periodiche, cioè riassumono gli stessi valori dopo un intervallo chiamato appunto periodo. Per il **seno** e il **coseno** il periodo è 2π, mentre per la **tangente** il periodo è π. Ne consegue che:

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos x = \cos(x + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$
$$\tan x = \tan(x + k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre il seno e la tangente sono funzioni **dispari** mentre il coseno è una funzione **pari**.

3.12.8 Grafici

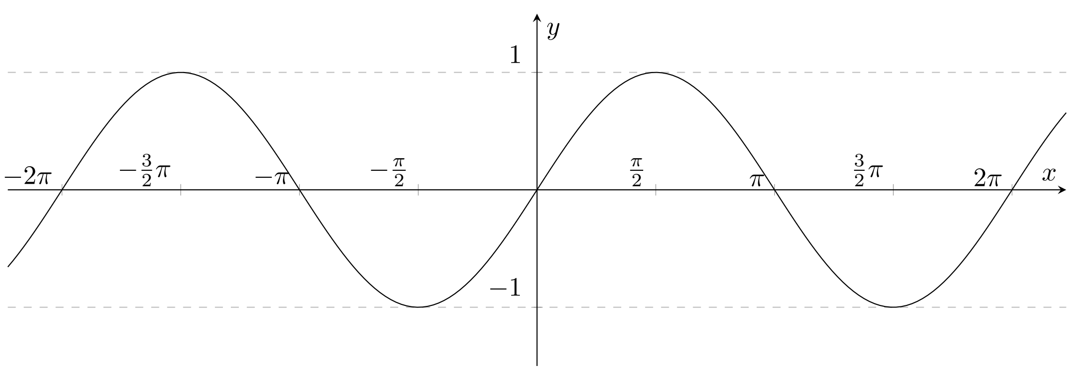


Figure 7: Grafico di $y = \sin x$

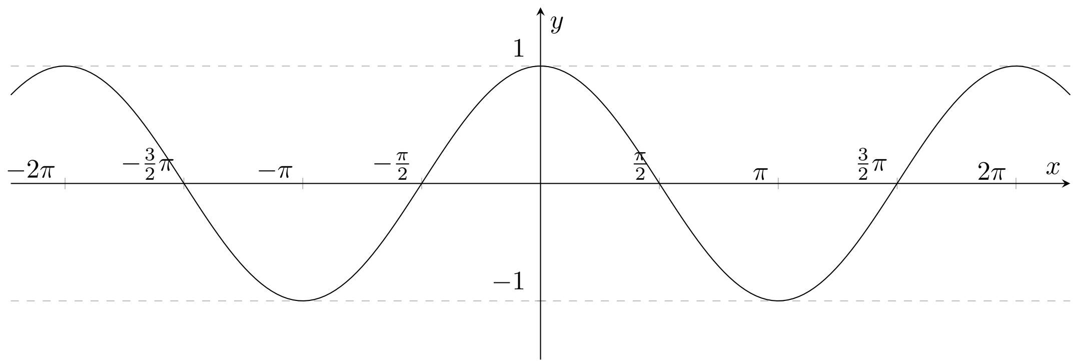


Figure 8: Grafico di $y = \cos x$

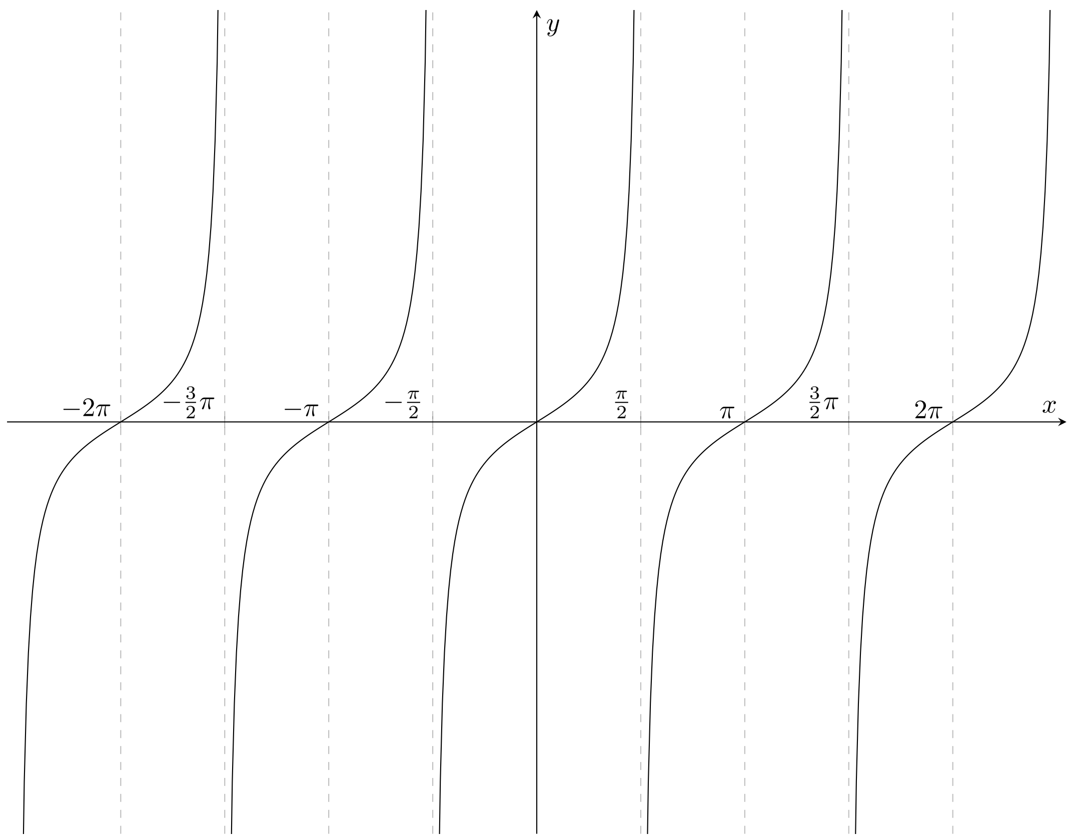


Figure 9: Grafico di $y = \tan x$

3.12.9 Formule utili

Dalla prima identità è possibile ricavare una formula per passare dal seno al coseno, il problema è che per farlo bisogna prima sapere in che quadrante ci si trova e, di conseguenza, decidere il segno della radice:

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Di seguito le formule di **addizione** e **sottrazione**:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Formule di **duplicazione**:

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha = \\
&= 2\cos^2\alpha - 1
\end{aligned}$$

Le ultime due formule per la duplicazione del coseno sono ricavate sostituendo a $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ la prima identità fondamentale ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Si noti come la formula di duplicazione del coseno permette di passare **da un quadrato a una funzione lineare** e viceversa.

Ulteriori formule:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha
\end{aligned}$$

3.12.10 Funzioni goniometriche inverse

Essendo seno e coseno periodiche ovviamente non sono invertibili, in quanto per essere invertibili dovrebbero essere iniettive e suriettive. In realtà seno e coseno sono suriettive, ma non iniettive. È quindi necessario restringere il loro dominio per renderle iniettive.

Per convenzione il dominio del **seno** si restringe all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si noti che si potrebbe scegliere un qualsiasi altro intervallo purché il seno "ristretto" sia ancora iniettivo (es. si può prendere come intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ ma non $[0, \pi]$).

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

Essendo diventata biunivoca è possibile invertirla:

Definizione

La funzione inversa al seno è l'**arcoseno**:

$$\left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Essendo che il codominio dell'arcoseno è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1] \\ \sin(\arcsin x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ \ (\text{non } \mathbb{R}) \\ \arcsin(\sin x) = x \end{cases}$$

Per esempio: $\arcsin(\sin\pi) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi$.

Lo stesso discorso vale per il **coseno** e la **tangente**. Mente però per la tangente possiamo tenere lo stesso intervallo del seno come dominio ristretto, per il coseno è necessario usare un altro intervallo in quanto $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ non lo renderebbe iniettivo:

Definizione

La funzione inversa al coseno è l'**arcocoseno**:

$$\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(y) = \arccos y$$

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1] \\ \cos(\arccos x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in [0, \pi] \quad (\text{non } \mathbb{R}) \\ \arccos(\cos x) = x \end{cases}$$

Definizione

La funzione inversa alla tangente è l'**arcotangente**:

$$\left(\tan|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(y) = \arctan y$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \tan(\arctan x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{non } \mathbb{R}) \\ \arctan(\tan x) = x \end{cases}$$

I grafici delle funzioni inverse sono i seguenti:

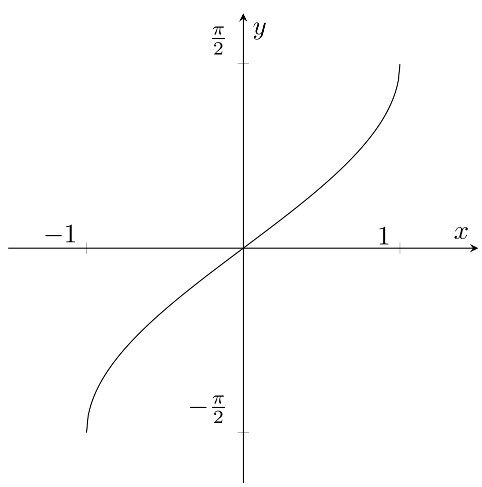


Figure 10: Grafico di $y = \arcsin x$

3.13 Esponenziale

Come abbiamo ricavato dalla radice aritmetica (sezione 3.11), siamo in grado di definire l'esponenziale per un qualsiasi esponente razionale positivo. Infatti qualsiasi numero razionale positivo è esprimibile

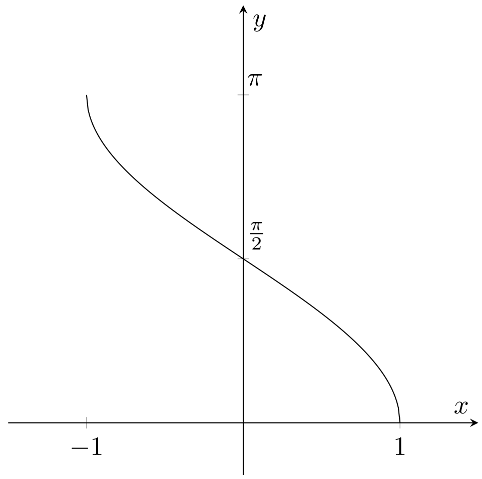


Figure 11: Grafico di $y = \arccos x$

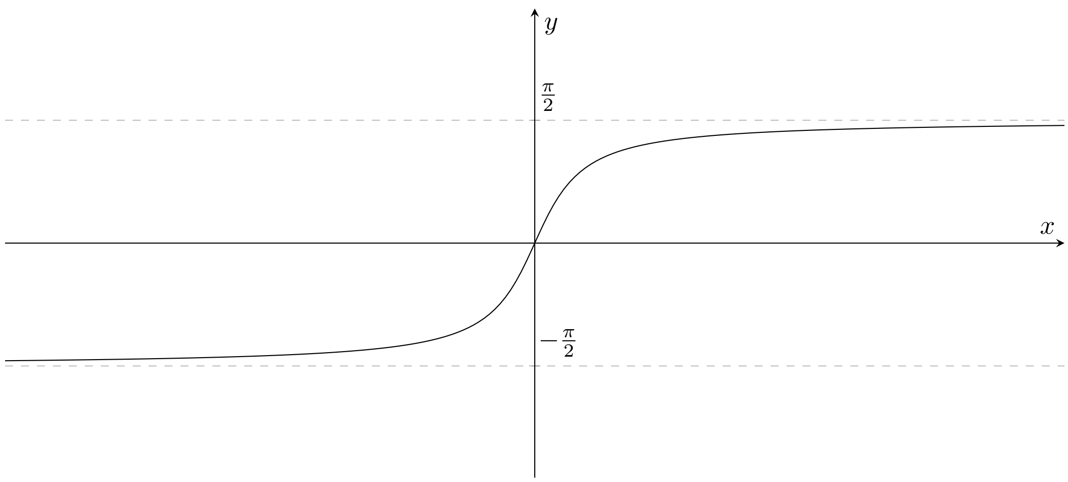


Figure 12: Grafico di $y = \arctan x$

nella forma $q = \frac{m}{n}$ e quindi, sempre per la radice aritmetica:

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \forall q \in \mathbb{Q}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+, \text{ con } n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0$$

La base dell'esponenziale è necessario che sia positiva in quanto se non lo fosse la definizione arriverebbe ad una contraddizione. Per esempio se volessi calcolare $(-2)^3 = -8$ come un esponenziale seguendo la definizione che abbiamo:

$$(-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8 \neq -8$$

Il primo passo per estendere questa definizione è chiederci come possiamo definire l'esponenziale per tutto l'insieme dei razionali, cioè anche per esponenti razionali negativi. La risposta è abbastanza semplice perché ci basta dire che se l'esponente è negativo calcoliamo il reciproco con l'esponente positivo:

$$a^{-q} = a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \forall q \in \mathbb{Q}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+, \text{ con } n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0$$

Siamo quindi riusciti a definire l'esponenziale per tutti gli esponenti razionali, sia positivi che negativi. Ora ci manca estendere questa definizione ai numeri reali. Purtroppo per farlo sono necessarie due nozioni non ancora introdotte: quella di successione e quella di limite. Per comprendere quindi a pieno i passaggi successivi è necessario andare prima guardarsi le sezioni relative (cioè la sezione 4 per le successioni e la sezione 5 per i limiti).

La domanda è come facciamo a definire $3^{\sqrt{2}}$ o $5^{\sqrt{27}}$? Cioè come facciamo a definire l'esponenziale per gli esponenti appartenenti all'insieme $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$? L'idea è di **approssimare l'esponente con una successione** di numeri razionali. Se per esempio voglio calcolare $3^{\sqrt{2}}$, ho come esponente $\sqrt{2}$, quindi la successione diventa:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= 1,4 \\ q_3 &= 1,41 \\ q_4 &= 1,414 \\ q_5 &= 1,4142 \\ q_6 &= 1,41421 \\ &\vdots \end{aligned}$$

È facile vedere che questa successione è **crescente** ($3^{q_n} \leqslant 3^{q_{n+1}}$) visto che il termine successivo ha sempre una cifra in più e inoltre questa successione è **superiormente limitata** visto che $3^{q_n} \leqslant 3^2 = 9$. Essendo crescente e superiormente limitata questa successione ha limite e quindi $3^{\sqrt{2}}$ si definisce proprio come il limite di questa successione:

$$3^{\sqrt{2}} := \lim_{n\to+\infty} 3^{q_n}$$

Arriviamo quindi a definire il caso generale dell'esponenziale:

Definizione

Si definisce **esponenziale** in base a di x ($\exp_a x$) e si indica con a^x, $\forall a > 0 \in \mathbb{R}$:

1. Se $x \in \mathbb{Q}_+$:
$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{con } n, m \in \mathbb{N} : x = \frac{m}{n} \text{ e } n \neq 0$$

2. Se $x \in \mathbb{Q}_-$:
$$a^x = a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \text{con } n, m \in \mathbb{N} : x = -\frac{m}{n} \text{ e } n \neq 0$$

3. Se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:
Data $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q} : q_n \nearrow, q_n \to x$:
$$a^x := \lim_{n\to+\infty} a^{q_n}$$

L'esponenziale in **base naturale** è quello in base e

Il numero e è descritto nella sezione relativa al numero di Eulero (Sezione 5.2) e si dice che l'esponenziale in questa base è "naturale" perché ha moltissime proprietà che vedremo in seguito.

3.14 Logaritmo

Come molte funzioni anche l'esponenziale ha una sua funzione inversa, e cioè che permette di trovare l'esponente data la base e il risultato. La funzione inversa all'esponenziale è il **logaritmo**:

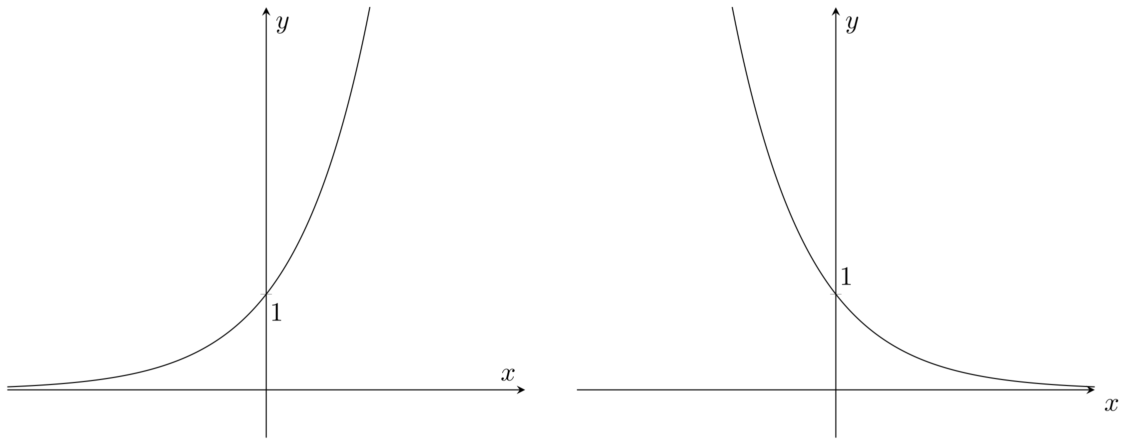


Figure 13: Grafico (da sinistra a destra) di $y = a^x$ con $a > 1$ e di $y = b^x$ con $0 < b < 1$

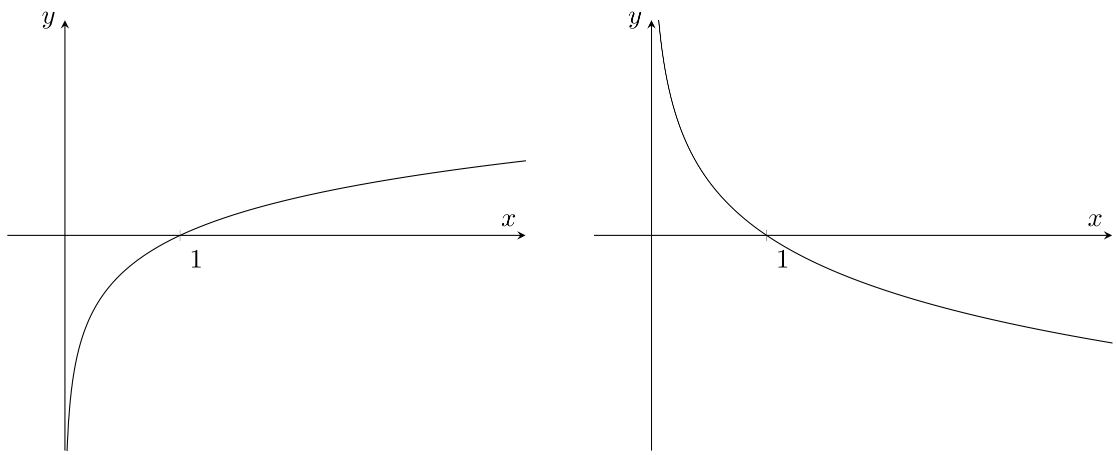


Figure 14: Grafico (da sinistra a destra) di $y = \log_a(x)$ con $a > 1$ e di $y = \log_b(x)$ con $0 < b < 1$

Teorema

Dato $a \in \mathbb{R} : a > 0, a \neq 1$, $\forall y \in \mathbb{R} : y > 0$, $\exists! x \in \mathbb{R}$: $a^x = y$. Definiamo **logaritmo** in base a di y:

$$\log_a(y) := x$$

La funzione logaritmo ha come dominio $\mathbb{R}^*_+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ e come codominio $\mathbb{R}$:

$$\log : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$$

Essendo quindi il logaritmo l'inverso dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} a^{\log_a(y)} &= y \qquad \forall y \in \mathbb{R}^*_+ \\ \log_a(a^x) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Il logaritmo naturale, cioè in base e si indica come $\ln x$.

Ci sarebbe da discutere sulle proprietà del logaritmo, ma mi limiterò ad elencarle di seguito:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a\left(x\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

4 Successioni e serie

Definizione

Una successione di numeri reali è una funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) =: a_n$$

E si indicato in tre possibili modi:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \ (a_n)_n \ \text{ oppure } \ (a_n)$$

L'idea alla base delle successioni matematiche è poter scrivere una lista di numeri che però abbiano un ordine. Avendole infatti definite come funzioni si può tenere l'ordine dei termini della successione semplicemente:

$$\begin{gathered} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_1 \\ f(2) = a_2 \\ f(3) = a_3 \\ \vdots \end{gathered}$$

Il poter scrivere numeri in successione e dare loro un ordine sembra apparentemente sembra inutile, ma in realtà si rivela estremamente utile in moltissime definizioni di funzioni che però vanno estese. Per esempio, come è spiegato nella sezione 3.13 riguardo all'esponenziale, per definire tale funzione per tutti i numeri reali è necessario utilizzare una successione.

Definizione

Data una successione $(a_n)_n$ e un insieme $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. (a_n) si dice:

- **Superiormente limitata** se A è superiormente limitato.
- **Inferiormente limitata** se A è inferiormente limitato.
- **Limitata** se A è limitato.

4.1 Successioni monotone

Per capire quanto segue è necessario prima guardare la sezioni sui limiti delle successioni (5.1).

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **crescente** e si indica con $(a_n \nearrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant a_{n+1}$$

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **strettamente crescente** e si indica sempre con $(a_n \nearrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$$

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **decrescente** e si indica con $(a_n \searrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant a_{n+1}$$

Definizione

$(a_n)_n$ si dice **strettamente decrescente** e si indica sempre con $(a_n \searrow)$ se:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$$

Una successione crescente o decrescente si dice **monotona**. Le successioni monotone **hanno sempre limite**.

Teorema

Se $(a_n)_n$ è **crescente**, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Se $(a_n)_n$ è **decrescente**, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Dimostriamo il teorema appena enunciato:

Dimostrazione

Dimostreremo il teorema soltanto per $(a_n)_n \nearrow$. Si tratta quindi di provare:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Poniamo $L \coloneqq \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ Bisogna dimostrare due casi: $L = +\infty$ e $L \in \mathbb{R}$

1. $\mathbf{L} = +\infty$ Ci riduciamo a provare che

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

   cioè

   $$\forall K > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \overline{n} : a_n > K$$

   Dato $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

   - A non è superiormente limitato in quanto $L = +\infty$
   - A di conseguenza non ammette maggioranti
   - Ne consegue che K non è un maggiorante $\implies \exists a_{\bar{n}} \in A : a_{\bar{n}} > K$
   - Siccome per ipotesi $(a_n)_n \nearrow \implies \forall n \geqslant \bar{n} : a_n \geqslant a_{\bar{n}} > K$

2. **L** $\in \mathbb{R}$ Ci riduciamo a provare che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

cioè

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \bar{n} : |a_n - L| < \epsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

$a_n < L + \epsilon$ è ovvio per ipotesi in quanto L è un maggiorante, quindi $\forall n \; a_n \leqslant L < L + \epsilon$. Ci rimane quindi solo da trovare $\bar{n}$ tale che:

$$\forall n \geqslant \bar{n} : a_n > L - \epsilon$$

Essendo $L = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

- L è il più piccolo dei maggioranti di A
- $L - \epsilon$ non è quindi un maggiorante di $A \implies \exists a_{\bar{n}} \in A : L - \epsilon < a_{\bar{n}}$
- Essendo $(a_n)_n \nearrow$ si ha che $\forall n \geqslant \bar{n} \;\; L - \epsilon < a_{\bar{n}} \leqslant a_n$

quindi

$$a_n > L - \epsilon$$

Q.e.d.

Corollari

1. Se $(a_n)_n \nearrow$ e $(a_n)_n$ è **superiormente limitata**, allora $(a_n)_n$ è **convergente**, cioè

$$\exists r \in \mathbb{R} : a_n \longrightarrow r$$

2. Se $(a_n)_n \searrow$ e $(a_n)_n$ è **inferiormente limitata**, allora $(a_n)_n$ è **convergente**, cioè

$$\exists r \in \mathbb{R} : a_n \longrightarrow r$$

5 Limiti

Prendiamo una successione abbastanza semplice da definire, tipo:

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

Cominciamo ora ad elencare i suoi termini e calcoliamo i suoi valori:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{0}{1} = 0 \\
a_2 &= \frac{1}{2} = 0.5 \\
a_3 &= \frac{2}{3} = 0.\overline{6} \\
a_4 &= \frac{3}{4} = 0.75 \\
&\vdots \\
a_{1000} &= \frac{999}{1000} = 0.999 \\
&\vdots \\
a_{100000} &= \frac{99999}{100000} = 0.99999
\end{aligned}$$

È facile notare che più n diventa grande più il valore della successione *tende* a 1. Come si formalizza questa cosa? Con il concetto di limite.

5.1 Limite di una successione

Definizione

Data una successione $(a)_n$, e un numero $L \in \mathbb{R}$, si dice che $(a)_n$ è **convergente** e si indica:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \qquad \text{oppure} \qquad (a)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \bar{n} : |a_n - L| < \epsilon$$

Definizione

Data una successione $(a)_n$, si dice che $(a)_n$ è **divergente** e si indica:

- $$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad (a)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  se

  $$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \bar{n} : a_n \geqslant \epsilon$$

- $$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \text{oppure} \qquad (a)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

  se

  $$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \bar{n} : a_n \leqslant -\epsilon$$

Se esiste il limite di una successione esso è **unico**

Esistono successioni che non hanno limite (non sono né convergenti né divergenti).

$$a_n = (-1)^2$$
$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1\ \cdots$$

La successione è limitata in quanto i suoi valori sono $-1e1$, eppure non ha limite in quanto oscilla.

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$
$$a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -3,\ a_4 = 4\ \cdots$$

La successione in quanto caso non è limitata e non ha un limite in quanto ”salta” tra valori positivi e valori negativi.

5.2 Numero di Eulero (o Nepero)

Prendiamo in considerazione la serie

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dimostriamo che è una serie **convergente**, e chiamiamo il suo limite ***e***. Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$$

Lemma

È necessario, per questa dimostrazione, introdurre la *disuguaglianza di Bernoulli.*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Dimostrazione: proviamo la disuguaglianza di Bernoulli per induzione.

1. Caso $n = 1$:
$$(1+x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x$$
$$1 + x \geqslant 1 + x$$

2. Caso $n + 1$: Ipotesi induttiva sappiamo che vale $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$. Dimostriamo che:
$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$$
Considerando solo la parte sinistra:
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$
Usando l'ipotesi induttiva:
$$(1+x)^n \cdot (1+x) \geqslant (1+nx) \cdot (1+x) = 1 + x + nx + nx^2$$
$$= 1 + (n+1) \cdot x + nx^2$$
Quindi:
$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \cdot x + nx^2$$
Ed essendo $nx^2 \geqslant 0$ si può togliere in quanto non cambierebbe la disequazione:
$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \cdot x$$

Qed.

Facciamo ora la dimostrazione riguardante il numero di Eulero:

Dimostrazione

Per dimostrare che una successione è convergente ci basta dimostrare che è (strettamente) crescente e limitata. Questo dal corollario della dimostrazione nella sezione 4.1.

1. Dimostriamo che (a_n) è (strettamente) crescente: Per dimostrare che $(a_n)_n \nearrow$ ci basta dimostrare che:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \forall n$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}} =$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n} =$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\right)^{n}$$
Usiamo la disuguaglianza di Bernoulli. Però assicuriamoci prima di poterla usare:
$$x = -\frac{1}{n^2+2n+1} \geqslant -1$$
$$\frac{1}{n^2+2n+1} \leqslant 1$$
$$1 \leqslant n^2+2n+1$$
$$0 \leqslant n^2+2n$$
Verificato! Ora usiamola:
$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\right)^{n} \geqslant \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1+n\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\right) =$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$
$$= \frac{n^3+3n^2+3n+1+1}{n^3+3n^2+3n+1} = 1+\frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

2. Dobbiamo provare ora che $(a_n)_n$ è limitata. Usiamo il binomio di newton:
$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}\cdot\frac{1}{k!} =$$

È facile notare che:
$$\frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \leqslant 1$$
In quanto il denominatore sarà sempre più grande del numeratore (tranne per il primo termine) e quindi ogni singolo termine sarà $\leqslant 1$ ed essendo tutti moltiplicati tra di loro il risultato sarà anch'esso $\leqslant 1$. Possiamo quindi concludere che:

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

Possiamo notare che:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1 \geqslant k(k-1) > 0 \qquad \text{per } k \geqslant 2$$

$$\implies k! > k(k-1) \implies \frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Quindi sostituendo

$$< 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 + \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right] =$$

Le coppie di termini dentro la parentesi quadre condividono il primo elemento con il secondo della coppia precedente. Se si espandono le somme si cancellano tutti tranne il primo e l'ultimo:
$$= 2 + \left[1 - \frac{1}{n} \right] = 3 - \frac{1}{n} < 3$$
Quindi:
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Dunque $(a_n)_n \nearrow$ è superiormente limitata. Ne consegue che, dal corollario presente nella sezione 4.1:
$$\exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Qed.

Si può dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$, quindi è un numero irrazionale e il suo valore è approssimativamente:

$$e \approx 2,71828182845904523536 \cdots$$

5.3 Limite di una funzione

Definizione

Intorno sferico di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio r:

$$x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} : r > 0$$

$$I_r(x_o) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < r\}$$

Che in pratica risulta:

$$I_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[$$

Definizione

x_0 si dice **punto di accumulazione** di $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ se:

$$\forall r > 0 : A \cap (I_r(x_0) \backslash \{x_0\}) \neq \varnothing$$

Comunque prendo piccolo r c'è sempre un elemento di $\mathbb{A}$ diverso da x_0. L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme è indicato come segue[3]:

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è un punto di accumulazione di } \mathbb{A}\}$$

Posso in pratica avvicinarmi indefinitamente ad x_0 sempre rimanendo in $\mathbb{A}$

Proposizione:
$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}, x_o \in \mathbb{R}$. x_0 è un punto di accumulazione per A se e solo se $\exists (a_n)_n \subseteq \mathbb{A}$ t.c.

1. $a_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

Esempio: $\mathbb{A} = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \mathcal{D}(\mathbb{A}) = 0$$

Un insieme con $\mathcal{D} = \varnothing$ è un **insieme discreto**

5.4 Limite destro e limite sinistro

Se si vuole indicare il limite per $x \to x_0$ di una funzione $f(x)$ si indica:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Questo limite esiste solo se sono rispettate le seguenti condizioni:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \iff \begin{cases} \exists \lim_{x \to x_o^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to x_o^+} f(x) \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \end{cases}$$

In pratica il limite destro e sinistro devono esistere e il loro valore deve coincidere.

Se ci avviciniamo da destra (cioè da valori più grandi) ad un punto x_0 si scrive che x_0^+, se invece ci avviciniamo da sinistra (cioè da valori più piccoli) si scrive x_0^-.

[3] La lettera che indica l'insieme dei punti di accumulazione è una "D" che dovrebbe essere celtica. Fate riferimento agli appunti del prof in questo caso perché non riesco a trovare su LaTeX il simbolo esatto che usa lui. Il fatto è che ci si può confondere perché si usa la lettera "D" anche per indicare il dominio di una funzione. In questi appunti il dominio è indicato con *Dom*() mentre l'insieme dei punti di accumulazione è indicato con $\mathcal{D}$.

5.4.1 SCHEMA RIASSUNTIVO LIMITI:

Per tradurre un limite nella notazione epsilon-delta il seguente schema può tornare effettivamente molto utile.

$$\lim_{\cdots} f(x) = \cdots$$

Nella parte inferiore del limite i casi sono i seguenti:

(i) $x \to x_0$

(ii) $x \to x_0^+$

(iii) $x \to x_0^-$

(iv) $x \to +\infty$

(v) $x \to -\infty$

Mentre per la parte destra dell'uguale i casi sono i seguenti:

1. $l \in \mathbb{R}$
2. $+\infty$
3. $-\infty$

Tradotto:

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(f) : \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta & \text{(i)} \\ x_0 < x < x_0 + \delta & \text{(ii)} \\ x_0 - \delta < x < x_0 & \text{(iii)} \\ x > \delta & \text{(iv)} \\ x < -\delta & \text{(v)} \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x) - l| < \epsilon & 1 \\ f(x) > \epsilon & 2 \\ f(x) < \epsilon & 3 \end{cases}$$

Quindi se per esempio devo tradurre il seguente limite:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$$

Vedo che $x \to 5^-$ è l'opzione numero (iii), mentre a destra dell'uguale ($+\infty$) ho l'opzione 2. Quindi diventa:

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(f) : 5 - \delta < x < 5 \implies f(x) > \epsilon$$

5.5 Algebra dei limiti

L'algebra dei limiti vale sia per le successioni che per le funzioni. Per comodità in seguito è riportata con il caso delle funzioni:
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tale che

$$f(x) \longrightarrow l_1 \qquad g(x) \longrightarrow l_2$$

Allora:

$$f(x) + g(x) \longrightarrow \begin{cases} l_1 + l_2 & \text{se } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } l_1 = +\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R} \vee l_2 = +\infty) \\ -\infty & \text{se } l_1 = -\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R} \vee l_2 = -\infty) \\ \text{Stessa cosa se si scambia } l_1 \text{ con } l_2 \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) \longrightarrow \begin{cases} l_1 \cdot l_2 & \text{se} \quad l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se} \quad l_1 = +\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}^*_+ \vee l_2 = +\infty) \\ +\infty & \text{se} \quad l_1 = -\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}^*_- \vee l_2 = -\infty) \\ -\infty & \text{se} \quad l_1 = +\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}^*_- \vee l_2 = -\infty) \\ -\infty & \text{se} \quad l_1 = -\infty \wedge (l_2 \in \mathbb{R}^*_+ \vee l_2 = +\infty) \\ \text{Stessa cosa se si scambia } l_1 \text{ con } l_2 \end{cases}$$

con $g(x) \neq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \begin{cases} \frac{l_1}{l_2} & \text{se} \quad l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se} \quad l_1 \in \mathbb{R} \wedge l_2 = \pm\infty \\ \pm\infty & \text{se} \quad l_1 = \pm\infty \wedge l_2 \in \mathbb{R}^*_+ \\ \mp\infty & \text{se} \quad l_1 = \pm\infty \wedge l_2 \in \mathbb{R}^*_- \\ \text{Stessa cosa se si scambia } l_1 \text{ con } l_2 \end{cases}$$

5.5.1 Forme indeterminate

Non essendo presenti tutti i casi nell'algebra dei limiti nascono quelle che vengono chiamate **forme indeterminate** in quanto corrispondo a situazione non univoche dove il risultato non si può stabilire a priori, ma è necessario trattare ogni caso singolarmente. Di seguito una lista di queste forme:

- $+\infty - \infty$
- $-\infty + \infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$

NOTA: Le espressioni che contengono i simboli $+\infty$ e $-\infty$ sono solo **espressioni formali**, non hanno alcun valore matematico!

5.6 Teoremi dei limiti

Teorema

Teorema di **permanenza del segno**. Data $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad l > 0$$

Allora:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in A, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0 \implies f(x) > 0$$

Vale anche nel caso di $l < 0$.

Teorema

Teorema del **confronto**. $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \epsilon > 0 : g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \forall x \in [A \cup I_r(x_0)] \setminus x_0 \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Teorema

Aiuta i calcoli con le forme indeterminate $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$. Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathcal{A}$. $\exists \delta > 0$:

1. Sx:
$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A : x_0 - \delta < x < x_0$$
Quindi:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 0^+$$
Allora:
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$
Se $f < 0$ allora 0^- e $-\infty$.

2. Dx:
$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A : x_0 < x < x_0 + \delta$$
Quindi:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0^+$$
Allora:
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$
Se $f < 0$ allora 0^- e $-\infty$.

5.7 Limiti Notevoli

I limiti notevoli sono particolari limiti che nonostante siano una forma indeterminata, il loro valore è conosciuto. In realtà molti limiti con forme indeterminate hanno un valore conosciuto perché attraverso tecniche e metodi di calcolo si riesce a ricavare. La differenza con i limiti notevoli però è che questi ultimi sono estremamente fondamentali per molte dimostrazioni e per molti esercizi. Inoltre comprendono solo funzioni elementari e vengono dimostrati una volta per tutte e poi vengono dati per buoni nel calcolo dei limiti.
Il limite notevole più famoso e sicuramente più importante è:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

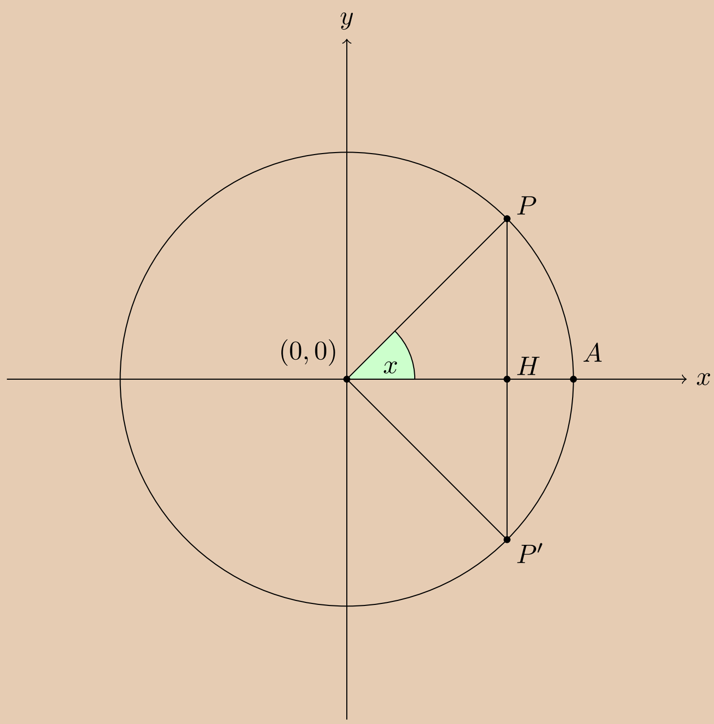
Per dimostrarlo è prima necessario dimostrare 2 lemmi:

Lemma

Dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Costruiamo una circonferenza goniometrica come in figura:



Per la definizione di seno e coseno: $\sin x = \overline{HP}$ e $\cos x = \overline{OH}$. Inoltre $\overline{PP'} < \widehat{PP'}$ perché il "percorso" più breve tra due punti in geometria euclidea è il segmento che li congiunge. Facendo qualche semplificazione:

$$\overline{PP'} < \widehat{PP'}$$
$$2\overline{HP} < 2\widehat{PA}$$
$$\overline{HP} < \widehat{PA}$$

Essendo segmenti, ed essendo quindi sempre positivi, riscriviamo la nostra disuguaglianza con il valore assoluto.

$$\left|\overline{HP}\right| < \left|\widehat{PA}\right|$$

Si noti che per la precedente definizione di seno, per la definizione di angolo in radianti e per il fatto che siamo sulla circonferenza goniometrica che ha raggio pari a 1:

$$|\sin x| < |x|$$

Ed essendo il valore assoluto sempre maggiore o uguale a zero:

$$0 \leqslant |\sin x| < |x|$$

Dal teorema del confronto (Sezione: 5.6) si ha che:

$$\lim_{x \to 0} |\sin x| = 0$$

e quindi:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

Qed.

Lemma

Dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Facciamo qualche trasformazione algebrica e usiamo la duplicazione del coseno (Sezione: 3.12.9):

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ne consegue che:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Dal lemma precedente abbiamo:

$$0 \leqslant |\sin x| < |x|$$
$$0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right|$$
$$0 \leqslant \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{4}$$
$$0 \leqslant 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{2}$$

E quindi facendo una sostituzione:

$$0 \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{2}$$

Sempre per il teorema del confronto (in quanto $x \to 0$ implica $\frac{x^2}{2} \to 0$):

$$\lim_{x\to 0} 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Sostituendo:

$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = 0$$

E quindi:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Qed.

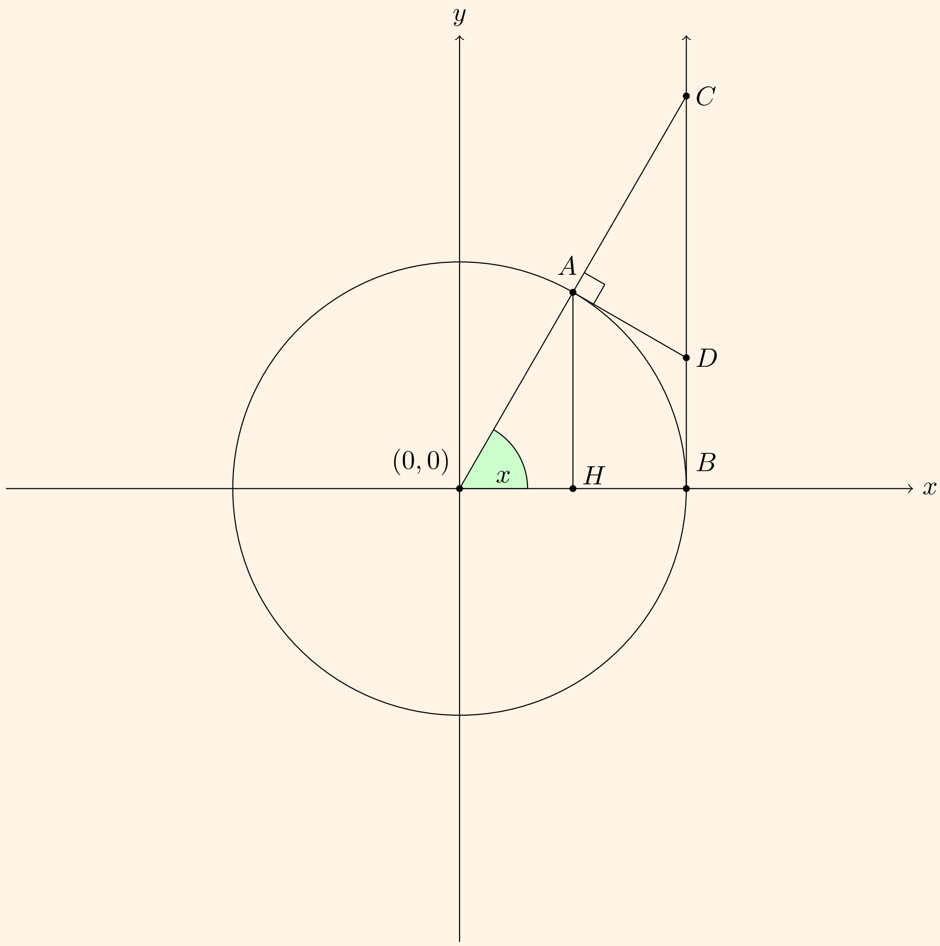
Finito di dimostrare i lemmi passiamo ora a dimostrare il limite notevole vero e proprio:

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Disegniamo un arco di circonferenza goniometrica (quindi con centro nell'origine e raggio 1). Il segmento $\overline{AH}$ è perpendicolare a $\overline{OB}$. Il segmento $\overline{AD}$ è perpendicolare a $\overline{AC}$.



Assumiamo per iniziare $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Per definizione di seno, coseno e tangente abbiamo che:

- $A(\cos x, \sin x)$
- $B(1, 0)$
- $C(1, \tan x)$

Notiamo che $\overline{AH} \leqslant \overset{\frown}{AB}$ in quanto $\overline{AB} \leqslant \overset{\frown}{AB}$, per il fatto che la distanza tra due punti in geometria euclidea è il segmento che li congiunge, e $\overline{AH} \leqslant \overline{AB}$ in quanto ABH è un triangolo rettangolo dove $\overline{AB}$ è l'ipotenusa.

Dobbiamo inoltre notare che $\overset{\frown}{AB} \leqslant \overline{BC}$, in quanto $\overset{\frown}{AB} < \overline{BD} + \overline{AD}$ dalla geometria euclidea, inoltre $\overline{BD} + \overline{AD} < \overline{BD} + \overline{DC}$ in quanto $\overline{AD}$ è un cateto del triangolo ACD dove $\overline{CD}$ è l'ipotenusa. Basta infine notare che $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ e quindi:

$$\overline{AH} \leqslant \overset{\frown}{AB} \leqslant \overline{BC}$$

Essendo

$$\sin x = \overline{AH} \qquad x = \overset{\frown}{AB} \qquad \tan x = \overline{BC}$$

sostituendo diventa:

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

Visto che all'inizio abbiamo posto la condizione $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, per forza $\sin x > 0$. Possiamo quindi dividere tutto per $\sin x$:

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

Sia $\frac{x}{\sin x}$, sia $\frac{1}{\cos x}$ sono maggiori di zero per $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Possiamo quindi passare ai reciproci:

$$1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

In realtà, essendo $\sin x$ una funzione dispari e $\cos x$ una funzione pari:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

Questo vuol dire che la relazione scritta sopra vale anche per l'intervallo negativo $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Quindi:

$$1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x \qquad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

Per il lemma dimostrato precedentemente che prova che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ e il teorema del confronto (Sezione: 5.6):

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x} = 1$$

Qed.

Da questo teorema è possibile dimostrare l'area della circonferenza. Se infatti prendiamo una circonferenza generica C di raggio r e ci inscriviamo un poligono regolare S_n di n lati (come in figura 15):

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}(S_n)$$

In questo caso $\mathcal{A}$ rappresenta l'area. Osserviamo che:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \implies \frac{a}{2} = \frac{\pi}{n}$$

Inoltre usando un po' di trigonometria:

$$\overline{OH_1} = \overline{OA_1} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\overline{A_1H_1} = \overline{OA_1} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Quindi: Ne consegue che:

$$\mathcal{A}(O\overset{\triangle}{A_1}A_2) = 2 \cdot \mathcal{A}(O\overset{\triangle}{A_1}H) = \overline{A_1H} \cdot \overline{OH} = r^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

L'area di tutto il poligono quindi risulta:

$$\mathcal{A}(S_n) = n \cdot \mathcal{A}(O\overset{\triangle}{A_1}A_2) = n \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

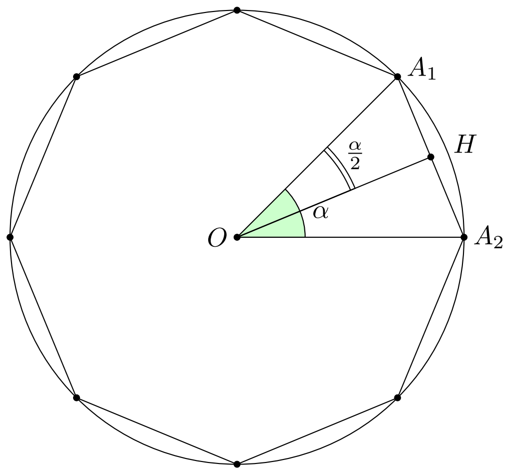


Figure 15: Circonferenza con inscritto un poligono regolare di n lati

Ora se calcoliamo il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}(s_n) = \lim_{n\to+\infty} n \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Facendo un piccolo cambio di variabile:

$$m := \frac{\pi}{n} \qquad m \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Quindi:

$$\lim_{m\to 0} r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sin(m)}{m} \cdot \cos(m) = r^2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1$$

Ne consegue che l'area della circonferenza:

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}(S_n) = \pi \cdot r^2$$

Un secondo limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Un terzo limite notevole che deriva dal secondo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Dimostrazione

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Altri limiti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (0 < a, \quad a \neq 1)$$

Il caso particolare in qui $a = e$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5.8 Asintoti

Definizione

$x = k$ è un **asintoto verticale** per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$$

Ne consegue che graficamente l'asintoto verticale si verifica quando la funzione sotto esame tende a $\pm\infty$ in un punto specifico (come in figura 16):

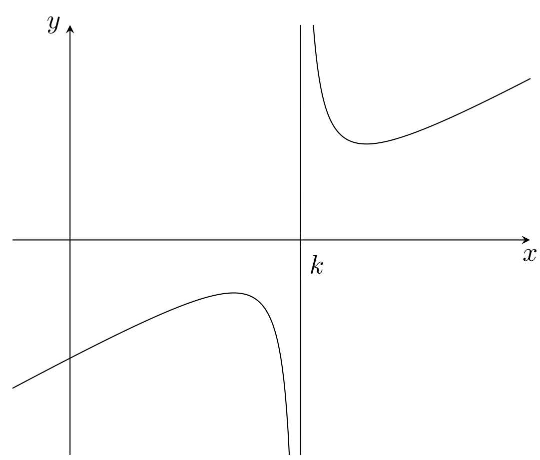


Figure 16: Asinto veritcale

Definizione

$y = l$ si dice **asintoto orizzontale** se: $f : A \to \mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Vale ovviamente anche il caso a $-\infty$. Nella stessa funzione ci possono essere al massimo 2 asintoti orizzontali.

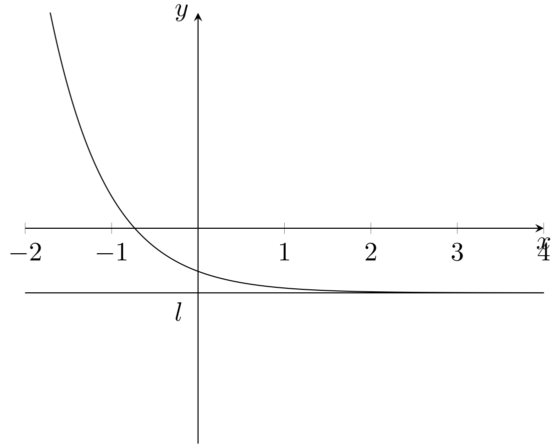


Figure 17: Asinto orizzontale

5.9 Limiti di funzioni elementari

IL limite di un polinomio $p(x)$ è il polinomio calcolato nel punto:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

Dimostrazione

Dimostriamo che il limite di un polinomio $p(x)$ è il polinomio calcolato nel punto:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Partiamo dal caso base:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Questo deriva direttamente dalla definizione di limite con $\delta = \epsilon$. Ora dall'algebra dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^2$$
$$\lim_{x \to x_0} x^3 = \lim_{x \to x_0} x^2 \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^3$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x \to x_0} x^j = x_0^j \qquad (j \in \mathbb{R})$$

Se aggiungiamo un coefficiente ($a \in \mathbb{R}$) davanti al polinomio non cambia nulla, infatti:

$$\lim_{x \to x_0} ax^j = \lim_{x \to x_0} a \cdot \lim_{x \to x_0} x_0^j = ax_0^j$$

Possiamo quindi provare una importante proprietà dei polinomi. Dato infatti un polinomio generico di grado n:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Vale che quello che vogliamo dimostrare, infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x \to x_0} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x_0^i = p(x_0)$$

Qed.

Di seguito un elenco di limiti delle funzioni elementari. Alcuni sono abbastanza ovvi quindi non ci sono dimostrazioni allegate:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin x$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \qquad \nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$$

5.10 Confronto di infiniti

Se si hanno due funzioni che vanno a $+\infty$ si possono confrontare. Il confronto ci permette di determinare qualche delle due funzioni ”*va a infinito più velocemente*”. Si riesce quindi a stilare una sorta di ”gerarchia” degli infiniti dove alcuni tendono a $+\infty$ più velocemente di altri. Questo è molto utile negli esercizi e soprattutto in analisi della complessità computazionale.

Date quindi due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono entrambe a $+\infty$ se:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & g \text{ cresce più velocemente di } f \\ +\infty & f \text{ cresce più velocemente di } g \\ l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \end{cases}$$

Non vi è qui riportata la dimostrazione in quanto necessita di un teorema visto più avanti. Per completezza la dimostrazione è comunque riportata nella sezione 7.8.6, subito dopo il teorema in questione. La decisione di riportare questa gerarchia qui è che ha molto senso con i limiti nonostante non si possa ancora dimostrare. La gerarchia degli infiniti risulta (dal più ”lento” al più ”veloce”):

1. $\log_a^m(x)$ con $a > 1$ e $m \in \mathbb{N}$
2. $p(x)$
3. a^x con $a > 1$
4. x^x

Ne consegue quindi che, per esempio, $x^{100^{100^{100}}}$ è ”più lento” di $(1,000001)^x$, cioè che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{100^{100^{100}}}}{(1,000001)^x} = 0$$

5.11 Continuità di una funzione

Definizione

$x_0 \in A$ si dice **punto isolato di** $A \subseteq \mathbb{R}$ se $x_o \notin \mathcal{D}(A)$. In pratica se non è un punto di accumulazione

Definizione

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **continua** in $x_0 \in A$ se:

1. $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$ (cioè x_0 è un punto isolato di A)
2. $x_0 \in \mathcal{D}(A) \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(Si noti che le due opzioni non possono valere contemporaneamente, sono quindi congiunte da un *or* invece che un *and*).

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in A$. allora è continua su A. Si scrive

$$f \in \mathcal{C}(A)$$

dove $\mathcal{C}(A)$ è l'insieme delle funzioni continue su A, ed è definito come:

$$\mathcal{C}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in x}, \forall x \in A\}$$

La continuità è un grado molto importante per ”classificare” la regolarità di una funzione. Inoltre moltissimi teoremi che riguardano una o più funzioni richiedono che queste siano continue. L'idea che ci sta dietro alla continuità e il voler classificare rigorosamente tutte quelle funzioni ”belle” che puoi disegnare senza staccare la mano dal foglio[4].

[4] In realtà non è esattamente così, però è un buon modo per iniziare a capire l'argomento

Come vi diranno tutti i professori di analisi però, la definizione di continuità che si basa sul disegnare una funzione senza staccare la mano dal foglio è sbagliata. Questo perché vale solo per quelle funzioni che sono continue su tutto $\mathbb{R}$, mentre per quelle che sono continue nel loro dominio, ma proprio questo dominio è composto dall'unione di molteplici intervalli disgiunti, allora restano continue, ma per disegnarle è necessario comunque staccare la mano dal foglio.

Definizione

Il **dominio naturale** è il più grande sottoinsieme in cui una funzione è definita

Dai teoremi di algebra dei limiti segue che date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in A \cap B$ allora:

- $f \pm g$ è continua in x_0
- $c \in \mathbb{R} : c \cdot f$ è continua in x_0
- $f \cdot g$ è continua in x_0
- $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0 (se $g(x_0) \neq 0$)
- $|f|$ è continua in x_0
- $g(f(x_0))$ è continua in x_0 se $x_0 \in A \wedge f(x_0) \in B$ e f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$

Dimostrazione

Dimostriamo che $|x|$ è una funzione continua.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Prendiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, abbiamo due casi:

- Caso $x_0 \neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0} |x| = \begin{cases} \text{se} \quad x_0 > 0 : \lim_{x\to x_0} |x| = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = |x_0| \\ \\ \text{se} \quad x_0 < 0 : \lim_{x\to x_0} |x| = \lim_{x\to x_0} -x = -x_0 = |x_0| \end{cases}$$

- Caso $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to x^-} -x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to x^+} x = 0$$

  Questo implica che:

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$$

E quindi dalla definizione di continuità, $|x|$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Qed.

Dimostrazione

Dimostriamo che $\sin(x)$ è una funzione continua. In pratica dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \qquad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Possiamo riscrivere $\sin(x)$ come $\sin(x_0 + (x - x_0))$. Chiamiamo h il fattore $h := (x - x_0)$.

Quando $x \to x_0$, $h \to 0$. Quindi possiamo riscrivere il limite da dimostrare nel seguente modo:

$$\lim_{x \to h} \sin(x_0 + h) = \sin(x_0) \qquad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Avendo riscritto l'argomento del seno attraverso una somma, possiamo applicare le formule di addizione del seno:

$$\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0)$$

Sostituendo quindi nel limite (in quanto per $h \to 0$, $\cos(h) \to 1$ e $\sin(h) \to 0$):

$$\lim_{x \to h} \sin(x_0 + h) = \lim_{x \to h} \sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) = \sin(x_0)$$

Qed.

Dimostrazione

Dimostriamo che $\cos(x)$ è una funzione continua. In pratica dobbiamo provare che

$$\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0) \qquad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Con lo stesso trucco usato nella dimostrazione precedente ci riduciamo dimostrare:

$$\lim_{x \to h} \cos(x_0 + h) = \cos(x_0) \qquad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

Usando le formule di addizione del coseno:

$$\cos(x_0 + h) = \cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h)$$

Sostituiamo nel limite e calcoliamo (in quanto per $h \to 0$, $\sin(h) \to 0$ e $\cos(h) \to 1$):

$$\lim_{x \to h} \cos(x_0 + h) = \lim_{x \to h} \cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) = \cos(x_0)$$

Qed.

La **continuità della tangente** nel suo dominio naturale è dovuta dal fatto che la tangente può essere definita come rapporto tra *seno* e *coseno*, e il rapporto di funzioni continue è anch'esso continuo. L'**esponenziale** è continuo. Tutte le **funzioni inverse delle funzioni elementari** sono continue ($\ln x$, $\sqrt{x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$).

5.11.1 Funzioni definite a tratti

Per le funzioni definite a tratti il caso è un po' più particolare perché non si sa a priori se sono continue o no. In generale il metodo per scoprire se sono continue è il seguente. Prendiamo una funzione f definita a tratti in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \leqslant a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases}$$

Di solito sia g che h sono funzioni formate da composizioni di funzioni elementari, che rendono automaticamente continue le due funzioni. Il problema sorge quindi nel punto di separazione a. Per verificare che sia continua la funzione f bisogna fare in modo che sia g sia h si avvicinino ad a con lo stesso valore, cioè che abbiano lo stesso limite per $x \to a$.

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^+} h(x)$$

Inoltre è richiesto che il limite coincida con il valore della funzione $f(a)$. In questo caso non abbiamo fatto il test perché il valore della funzione era compreso nella funzione g in quanto era definito per $\leqslant$ invece che un minore stretto. Se però questo non fosse il caso va inserito $f(a)$ nelle uguaglianze dei limiti scritti sopra.

6 Teoremi generali

Questa sezione vuole raccogliere alcuni teoremi importanti che però non appartengono a nessuna sezione precedente in particolare in quanto richiedono l'uso di molti argomenti presi da sezioni differenti. Ho quindi congegnato che era meglio dedicare loro una sezione a parte, sperando che il mio intento di organizzazione possa essere apprezzato da quelli che leggeranno.

6.1 Teorema degli zeri

Il teorema degli zeri è estremamente importante in analisi. In pratica afferma che se una funzione è continua e ha un punto in cui è positiva (quindi è sopra l'asse delle ascisse) e un punto in cui è negativa (quindi è sotto l'asse delle ascisse), per forza tra quei due punti ce ne sarà un terzo in cui la funzione tocca l'asse delle ascisse. È abbastanza facile verificare che è vero in quanto se si vuol tracciare una linea continua che in punto è sopra l'asse delle ascisse e in un altro è sotto, per forza si è costretti ad intersecare tale asse. Per dimostrare questo teorema abbiamo però bisogno di due lemmi preliminari:

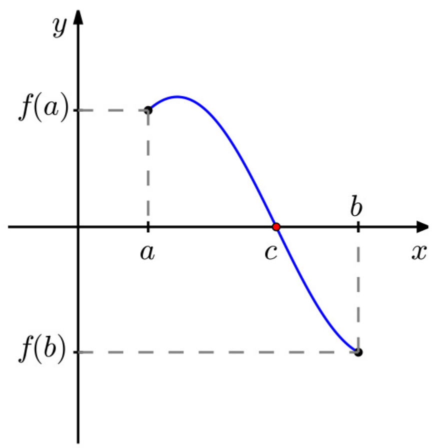


Figure 18: Rappresentazione grafica del teorema degli zeri

Lemma

Data una successione $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, se

$$\forall n, a_n < 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in R \ \wedge \ l \leqslant 0$$

Si noti che questo lemma vale anche per il caso in cui $\forall n, a_n > 0$, che implica $l \geqslant 0$. Dimostriamo ora il lemma[a]. Dobbiamo provare che:

$$\forall n, a_n < 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = l \leqslant 0$$

Fisso n numero t.c $\forall n, a_n < 0$ (H) per dimostrare:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \leqslant 0$$

Per assurdo assumiamo[b] $l > 0$ (H2) e riduciamoci a dimostrare il falso. Grazie alla definizione di limite possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon$$

Se espandiamo $|a_n - l| < \epsilon$ ci troviamo con:

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

Ed essendo che questa condizione deve valere $\forall \epsilon > 0$, scegliamo $\epsilon = \frac{l}{2}$. Quindi deve valere che:

$$a_n > l - \epsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$$

Per (H2) $\frac{l}{2} > 0$ ma per (H) $\forall n, a_n < 0$. ASSURDO in quanto a_n non può contemporaneamente essere maggiore di 0 e minore di 0.

Qed.

[a] La seguente dimostrazione è stata fatta dal prof in maniera imbarazzante, quindi la esplicito secondo la logica classica per renderla più formale

[b] Abbiamo usato il potere sconfinato della RAA (Coen approves)

Lemma

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A \cap \mathcal{D}(A)$ e inoltre f deve essere continua in x_0:

$$\forall (a_n)_n \subseteq A : a_n \to x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$$

Teorema

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continua}, \;\; f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Un paio di osservazioni utili sul teorema:

- La continuità di f è fondamentale in quanto se non lo fosse il teorema non potrebbe valere. Si consideri infatti il caso di una funzione definita a tratti nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (0 \leqslant x \leqslant 2) \\ 1 & (2 < x \leqslant 4) \end{cases}$$

  Quest'ultima rispetta tutte le specifiche del teorema ($f(0) \cdot f(4) < 0$) tranne la continuità (non è infatti continua in $x = 2$). Se si osserva il grafico (Figura: 19) si nota subito che questa funzione non ammette nessun punto in cui si annulla come vorrebbe il teorema degli zeri.

- La seconda osservazione riguarda la quantità di punti in cui si può annullare la funzione. Come si legge dal teorema, il punto c è garantito che esista ($\exists$) ma nessuno garantisce che è unico. Ci possono essere infatti un numero arbitrario di punti in cui la funzione si annulla, basti pensare al grafico delle funzioni goniometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Dimostrazione

Questa dimostrazione a differenza delle altre è di tipo *costruttivo*, cioè oltre a dimostrare il teorema fornisce un algoritmo di calcolo per trovare il punto c.

Assumiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. L'idea dietro questa dimostrazione è appunto trovare un

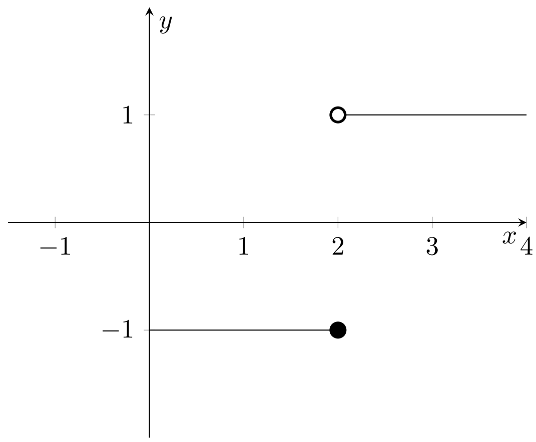


Figure 19: Funzione definita a tratti per far vedere che la continuità nel teorema degli zeri è una condizione necessaria

algoritmo di calcolo che permetta di determinare il punto c. Avendo un punto a in cui la funzione è **negativa** e un punto b in cui la funzione è **positiva** ci deve essere un punto che giace tra a e b in cui la funzione si annulla. Per trovarlo andiamo a "tentativi" dividendo l'intervallo a metà con la formula:

$$\frac{a+b}{2}$$

Da qui possiamo avere 3 casi:

1. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$. In questo caso abbiamo trovato il punto c proprio perché la funzione si annulla. Quindi abbiamo finito!
$$c = \frac{a+b}{2}$$

2. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$. In questo caso non abbiamo trovato il punto c, ma bensì la funzione ci ha restituito un punto negativo. Essendo il punto $f(b)$ ancora maggiore di 0 per ipotesi, possiamo applicare nuovamente questa procedura (cioè di suddividere l'intervallo a metà), però cambiando il punto a, in quanto adesso diventa:
$$a_2 := \frac{a+b}{2}$$

3. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$. L'idea di questo punto è identica a quella del punto 2, semplicemente invece che assegnare un valore diverso ad a, lo assegniamo a b perché questa volta il valore della funzione è positivo invece che negativo.
$$b_2 := \frac{a+b}{2}$$

Con i punti 2 e 3, riassegnando il valore ad a o b, restringiamo l'intervallo su cui vogliamo applicare questo algoritmo per trovare il punto c. Ed essendo che ad ogni iterazione ci avviciniamo sempre di più, a forza di stringere l'intervallo prima o poi arriveremo a c.

Nota: Ad ogni iterazione, se la funzione non si annulla, dobbiamo sostituire il valore del punto al corrispettivo punto a o b in modo che la funzione mantenga lo stesso segno. Questo perché se invertissimo i punti ci troveremmo in un caso in qui $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$, cosa che ovviamente annullerebbe il teorema. Quindi nel caso del punto 2 in cui sostituiamo il nuovo punto ad a, lo facciamo soltanto perché per ipotesi $f(a) < 0$ e la funzione nel nuovo punto è negativa. Se per ipotesi avessimo scelto $f(a) > 0$ avremmo dovuto sostituire il nuovo punto in b, e viceversa.

Essendo che dobbiamo ripete l'algoritmo, il caso n-ario diventa:

1. $$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0 \qquad \text{Fine:} \qquad c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

2. $$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \qquad \text{Iteriamo nuovamente:} \qquad a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$$

3. $$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0 \qquad \text{Iteriamo nuovamente:} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$$

Se l'algoritmo termina al passo $p \in \mathbb{N}$ significa che:

$$f\left(\frac{a_p + b_p}{2}\right) = 0 \qquad \text{e quindi:} \qquad c = \frac{a_p + b_p}{2}$$

Altrimenti la procedura non termina: in questo caso avremo costruito due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ contenute in $[a, b]$. Scriviamo di seguito le proprietà di queste 2 successioni:

i. $a_n \leqslant a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \geqslant b_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

ii. $a_n \leqslant b_n \forall n \in \mathbb{N}$

iii. $f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iv. $$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \qquad \forall n$$

   Se si espandono i vari passaggi si vede che in realtà ad ogni iterazione si divide l'intervallo iniziale $[a, b]$ in 2:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^3} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

A questo punto vogliamo dimostrare che:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c \\ \\ f(c) = 0 \end{cases}$$

Dal punto (i) e (ii) ricaviamo che sia $(a_n)_n$ sia $(b_n)_n$ sono **limitate**.

$$(a_n)_n \subseteq [a, b] \implies a_n \nearrow \ \forall n \implies \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(b_n)_n \subseteq [a,b] \implies b_n \searrow \ \forall n \implies \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$$

Dal punto (iv) e da quanto abbiamo ricavato possiamo fare il limite che tende a $+\infty$ di $b_n - a_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$
$$\beta - \alpha = 0$$

Quindi $\beta = \alpha$ e le due successioni hanno lo stesso limite! Abbiamo quindi provato che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n := c$$

Ci resta da dimostrare che $f(c) = 0$. Da quanto appena dimostrato e dal secondo lemma di questa prova:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$$

Poiché $a_n \to c$. Inoltre dal punto (iii) sappiamo che $f(a_n) \leqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Usando il primo lemma preliminare alla prova:

$$f(c) \leqslant 0$$

Se facciamo lo stesso per $f(b_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \geqslant 0$$

Avendo contemporaneamente $f(c) \leqslant 0$ e $f(c) \geqslant 0$:

$$f(c) = 0$$

Qed.

6.2 Radici di un polinomio di grado dispari

Teorema

Ogni polinomio di grado dispari ha almeno un radice reale.

È facile ricordarsi questo teorema perché tutti i polinomi di grado dispari hanno il termine di grado maggiore (che in quanto dispari) è soggetto al segno dell'argomento del polinomio. Cioè x^3 avrà lo stesso segno di x, mentre questo non vale per i polinomi di grado pari in quanto x^8 avrà sempre segno positivo. Se quindi si fanno i limiti per $+\infty$ e $-\infty$ di un polinomio di grado dispari, da una parte andrà sempre a $+\infty$ e dall'altra andrà sempre a $-\infty$ (seguendo appunto il segno della x). Ed essendo inoltre i polinomi funzioni continue, sono costretti ad assumere tutti i valori dell'asse delle ordinate almeno una volta[5]. Inoltre, visto che da una parte hanno valori positivi, dall'altra negativi e sono continui, esiste per forza un punto in cui si annullano (dal teorema degli zeri) e sarà proprio lì la loro radice.

Corollario: Tutti i polinomi di grado dispari assumono **tutti i valori reali**. Questo implica che una funzione che è definita tramite un polinomio di grado dispari è una funzione **suriettiva**, in quanto ha come immagine $\mathbb{R}$.

[5] Per chiarire: non assumono tutti i valori dell'asse delle ordinate perché sono funzioni continue e basta, assumono tutti i valori perché sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e da una parte vanno a $+\infty$ e dall'altra a $-\infty$

Dimostrazione

Dimostrazione del corollario:

Preso un qualsiasi polinomio di **grado dispari** $p(x)$, dobbiamo dimostrare che assume tutti i valori reali, cioè:

$$\forall k \in \mathbb{R} \;\; p(x) = k \;\text{ ha almeno una soluzione}$$

Ci basta considerare l'equazione $p(x) - k = 0$ (che resta un generico polinomio di grado dispari) e applicare il teorema appena enunciato.

Qed.

6.3 Teorema di Weierstrass

Definizione

$f : A \to \mathbb{R}$

1. $x_0 \in A$ si dice punto di **massimo assoluto** di f se:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in A$$

2. $x_0 \in A$ si dice punto di **minimo assoluto** di f se:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \forall x \in A$$

6.3.1 Formulazione 1

Teorema

Una funzione continua, in un intervallo chiuso e limitato, ammette il massimo e il minimo assoluti della funzione.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x) \leqslant f(x_0) =: M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x) \geqslant f(x_1) =: m \quad \forall x \in [a, b]$$

E quindi:

$$\mathrm{Im} f([a, b]) \subseteq [m, M]$$

Cioè, l'immagine di f in $[a, b]$ è un sottoinsieme dell'intervallo $[m, M]$.

È molto importante che la funzione sia *continua*, *in un intervallo chiuso* e *limitato* perché se manca anche solo una di queste cose **non esiste** il minimo, il massimo o entrambi (come si vede dai grafici nelle figure: 20, 21a e 21b)

6.3.2 Formulazione 2

La seconda formulazione di questo teorema è più generale rispetto alla prima e utilizza il teorema degli zeri in combinazione con la prima formulazione di questo teorema.

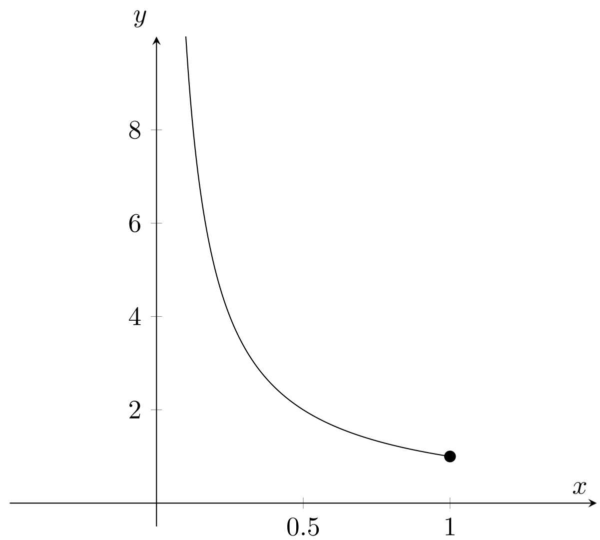


Figure 20: Intervallo aperto $]0, 1]$

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

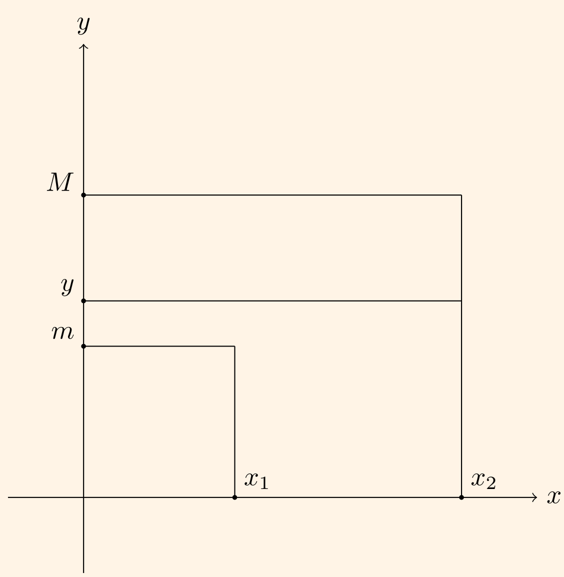
$$\exists M = \max f([a, b])$$

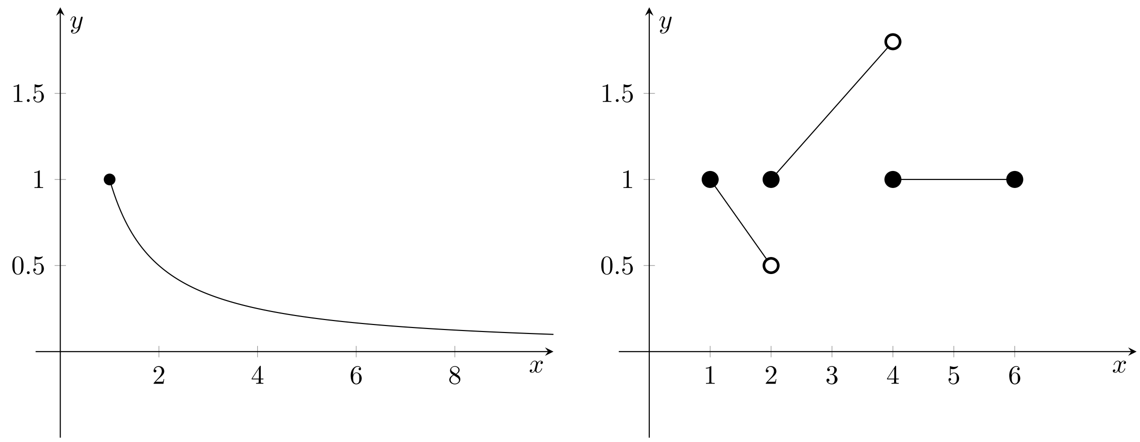
$$\exists m = \min f([a, b])$$

e vale che l'immagine di f nell'intervallo $[a, b]$ corrisponde esattamente a $[m, M]$:

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Dimostrazione





(a) Intervallo illimitato $[1, +\infty[$ (b) Funzione non continua

Figure 21: Altri due esempi per il teorema di Weierstrass

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \min f = m$$
$$\exists x_2 \in [a, b] : f(x_2) = \max f = M$$

Definiamo una funzione ausiliaria che $\forall y \in]m, M[$:

$$g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \qquad g(x) = f(x) - y$$

Se quindi calcoliamo la funzione g nei punti x_1 e x_2 diventa:

$$g(x_1) = f(x_1) - y = m - y < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - y = M - y > 0$$

Applicando quindi il teorema degli zeri:

$$\exists x_0 \in]x_1, x_2[\subseteq [a, b] : g(x_0) \iff f(x_0) - y = 0 \iff f(x_0) = y \quad \forall y \in]m, M[$$

Qed.

7 Derivate

Definizione

Dato un intervallo $I \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ si dice **punto interno** a I se **esiste un intorno sferico:**

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < 0\}$$

tale che:

$$B_r(x_0) \subseteq I$$

L'insieme dei punti interni si indica con un piccolo *tondino* in alto:

$$\mathring{I} := \{x \in I \mid \text{ x è un punto interno a } I\}$$

Questi punti sono diversi rispetto ai punti di accumulazione dei limiti per un paio di motivi. Il primo è che devono appartenere innanzitutto all'insieme. Se infatti si considera un insieme del tipo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, lo 0 è un punto di accumulazione pur non appartenendo all'insieme. Non è però un punto interno. La seconda differenza principale con i punto di accumulazione è che, mentre questi ultimi possono essere "al bordo" di un insieme, i punti interni no, e devono avere l'intorno sferico completamente interno all'insieme. Cioè preso l'intervallo $[2, 4]$, mentre sia 2 sia 4 sono punti di accumulazione, nessuno dei due è interno all'insieme. In questo caso i punti interni a questo insieme sono $]2, 4[$.

7.1 Introduzione informale

Prima di dare la definizione formale di derivata vorrei spendere qualche riga per cercare di spiegare l'idea che si trova dietro a questo potentissimo oggetto matematico. Il problema è che spesso ci si perde nelle definizioni formali e negli esercizi, senza apprezzare veramente quello che si sta facendo. Perché alla fine si spera che ognuno, dopo aver seguito un corso di analisi, sappia che la derivata di x^2 è $2x$, oppure che la derivata del seno è il coseno, però veramente in pochi hanno capito cosa significa e perché è così.

Derivata come tangente una curva: Vi siete mai chiesti (probabilmente no ma la domanda retorica andava fatta) quale sia la retta tangente a una curva? Cioè, se io vi disegno una curva su un foglio e vi traccio un punto sopra e vi chiedo di disegnare la tangente a quella curva, probabilmente la richiesta non risulta così difficile. Magari la retta non verrà perfetta, però il disegno si avvicinerebbe parecchio ad una vera e propria tangente. Se però io invece di darvi un disegno di una curva vi do una funzione e un punto, trovare la tangente ora è molto più complicato perché dovreste prima disegnare la funzione e poi finalmente tracciare la tangente. Però poi nasce il problema di come si disegna una funzione in modo abbastanza preciso e quindi la situazione diventa piuttosto complicata.

Facciamo un piccolo salto indietro e chiediamoci prima come si disegna una retta. Una retta, nella sua forma più classica, è data dalla seguente formula:

$$y = mx + q$$

Abbiamo quindi bisogno di due elementi per definirla: un coefficiente angolare m e un termine noto q. Sappiamo però, dati due punti, trovare l'unica retta che passa per entrambi. Mettiamo di avere $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$. Innanzitutto troviamo il coefficiente angolare della retta:

$$m = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

Fatto questo trovare q non è molto difficile: basta inserire nella retta m e uno qualsiasi dei due punti e risolvere l'equazione.

In realtà questo metodo di calcolare la retta presi due punti ci potrebbe venire molto comodo per calcolare la tangente ad una curva. Se infatti prendiamo due punti su di essa e poi li *avviciniamo abbastanza* tra loro possiamo ottenere una buona approssimazione di una tangente (figura 22).

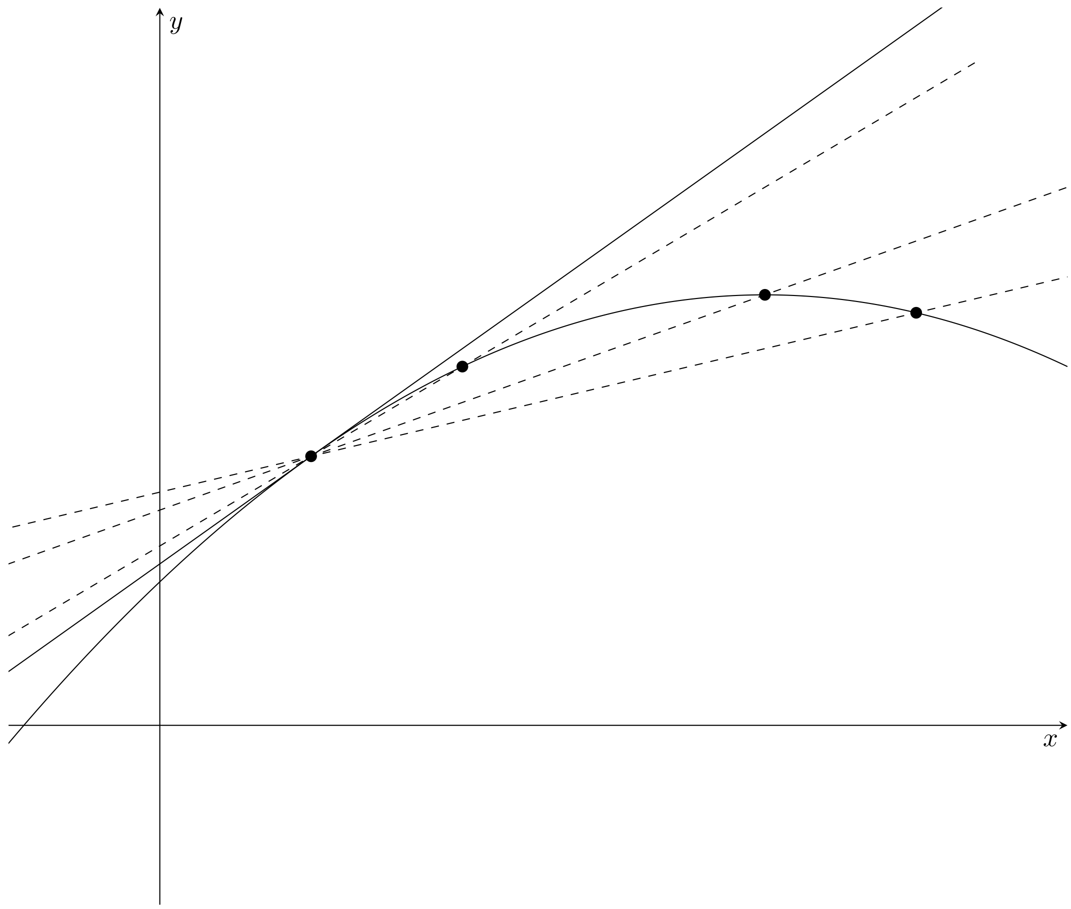


Figure 22: Approssimazione di una tangente con rette passanti per due punti

Il calcolo difficile non è tanto però il termine noto q, ma piuttosto il coefficiente angolare m. Questo perché dobbiamo prendere punti sempre più vicini e non è facile farlo venire preciso. Questo avvicinarci indefinitamente ad un punto dovrebbe però far accendere una piccola lampadina in testa: abbiamo già uno strumento matematico che ci permette di avvicinarci indefinitamente ad un punto: **il limite**.

Prendiamo ora una funzione $f(x)$ per il momento generica[6] e decidiamo di voler calcolare la tangente nel punto x_0. Come abbiamo appena visto ci servono due punti per calcolare la tangente: uno che resta fermo (in questo caso x_0) e uno che si avvicina a quest'ultimo. Per correttezza x_0 non è un punto, ma bensì $P(x_0, f(x_0))$. Il secondo punto che ci serve deve essere anch'esso sulla funzione e quindi imponiamo questa condizione per la sua ordinata: $Q(x, f(x))$. Il coefficiente angolare tra i due risulta quindi:

$$m = \frac{Q_y - P_y}{Q_x - P_x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Facendo in modo che il punto Q si avvicini a P indefinitamente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

[6]Per correttezza questa funzione non può essere generica perché non tutte le funzioni sono effettivamente derivabili, però rimaniamo così per il momento. In seguito verrà definita rigorosamente.

Et voilà, siamo arrivati alla definizione (informale) di derivata. La *derivata della funzione f nel punto x_0* è proprio il valore di quel limite, cioè il **coefficiente angolare della retta tangente alla funzione f nel punto x_0**.

Se si vuole trovare più comodamente la retta tangente una funzione $f(x)$ in un punto x_0 basta usare la formula:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

In generale è inutile comunque impararla perché si può sempre trovare la tangente in due passaggi: si calcola la derivata e quindi il coefficiente angolare e poi si impone il passaggio per il punto $P(x_0, f(x_0))$ e automaticamente si ha la stessa retta.

Facciamo un esempio: proviamo a trovare la retta tangente al grafico di $3x^3$ nel punto $x = 1$. Iniziamo calcolando la derivata nel punto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 3}{x - 1}$$

Raccogliamo il 3 e usiamo qualche piccolo trucchetto per trovare il limite:

$$\lim_{x\to 1} 3 \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} 3 \cdot \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} 3(x^2 + x + 1) = 3 \cdot 3 = 9$$

Ne consegue che il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $x = 1$ è $m = 9$. Imponiamo ora il passaggio per il punto $P(1, f(1)) = P(1, 3)$:

$$\begin{aligned} &y = mx + q \\ &3 = 9 \cdot 1 + q \\ &q = 3 - 9 = -6 \end{aligned}$$

Ne consegue che la nostra retta ha equazione:

$$y = 9x - 6$$

Derivata come misura del cambiamento: Un altro modo di vedere la derivata è come *misura del cambiamento*. Successivamente introdurremo un teorema che esplicita meglio questo concetto, ma per ora limitiamoci ad introdurlo informalmente. Come abbiamo appena visto la derivata è *il coefficiente angolare della retta tangente una curva in un punto*. Se osserviamo le figure 23 e 24 si può vedere come il coefficiente sia proporzionalmente più grande in base a quanto sta crescendo (o diminuendo per coefficienti negativi) la funzione. In pratica la derivata in questo caso sta rispondendo alla domanda **quanto sta cambiando la funzione in quel punto?**

Per quello può essere vista come la misura del cambiamento, perché se derivi una funzione puoi scoprire quanto effettivamente quella stia cambiando in relazione al suo argomento.

7.2 Introduzione formale

Definizione

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathring{I}$, f si dice **derivabile in** x_0 se:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

Ci sono due principali notazioni per indicare la derivata della funzione f nel punto x_0:

$$f'(x_0) \quad \text{oppure} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

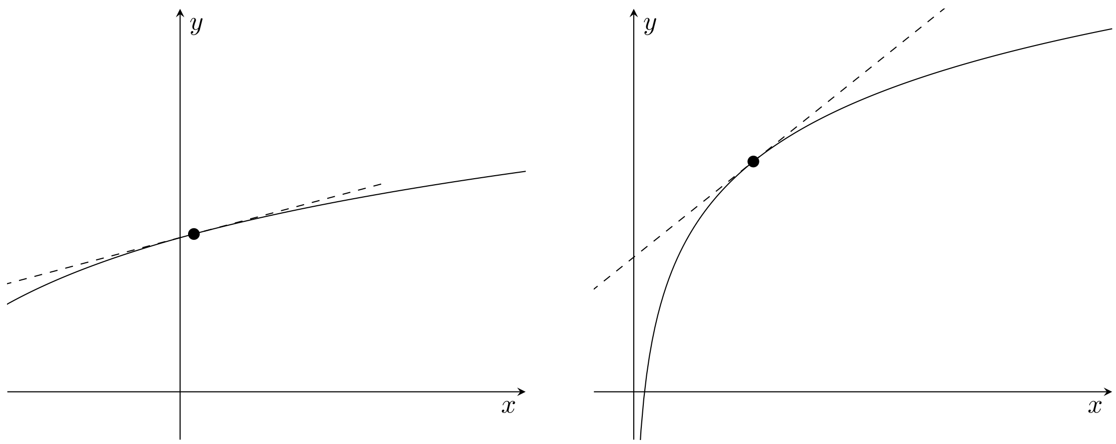


Figure 23: Tangenti una curva, coefficienti angolari rispettivamente (da sinistra a destra) 11° e 33°

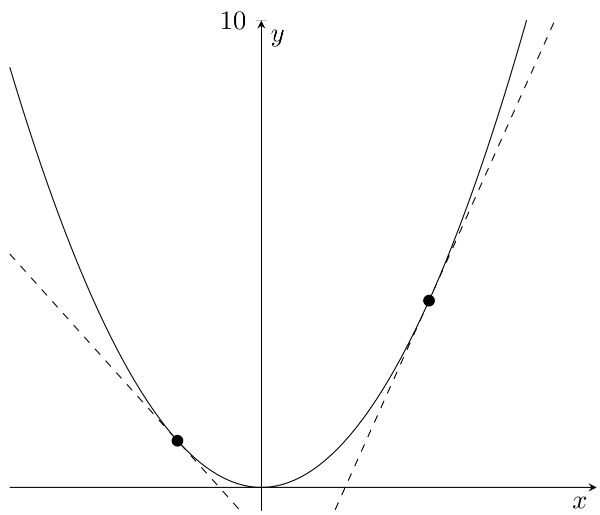


Figure 24: Tangente una curva, coefficiente angolare (da sinistra a destra) −63° e 75°

In generale i matematici preferiscono la prima mentre i fisici la seconda.

Essendo che c si sta avvicinando a x_0, è possibile riscrivere la derivata in maniera differente: In pratica x lo scriviamo in funzione di x_0 e ci aggiungiamo una piccola variabile che diventa sempre più piccola. Il risultato è lo stesso ma a per certe dimostrazioni conviene scriverlo così:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Infatti $x_0 = x + h$ e il denominatore si semplifica in quanto $x - x_0 = x - x - h = -h$. Cambiando segno anche al numerato il risultato è lo stesso.

Definizione

Derivata destra e sinistra: $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$.

- f si dice **derivabile a sinistra in** x_0, e si indica $f'_-(x_0)$, se:

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

- f si dice **derivabile a destra in** x_0, e si indica $f'_+(x_0)$, se:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

L'idea è la stessa dei limiti:

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ è derivabile sia a destra che a sinistra di } x_0 \\ f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f(x_0) \end{cases}$$

Definizione

f si dice **derivabile su** I se f è derivabile $\forall x \in I$

In questo ultimo caso, ad f si può associare una nuova funzione: la sua derivata. In pratica la nuova funzione assume i valori della derivata di f per ogni punto in cui è definita. Si indica generalmente con la notazione classica $f'(x)$.

Alcuni esempi: Di seguito riporto qualche esempio molto semplice di calcolo della derivata tramite la sua definizione. In realtà raramente si usa questo approccio nei calcoli effettivi, ma piuttosto si ricavano prima le derivate delle funzioni elementari e applicando qualche regola si riesce a derivare qualsiasi funzione senza calcolare limiti. È bello però far vedere comunque la definizione e la sua potenza in quanto tutto quello che verrà dopo sarà comunque frutto di questo.

Proviamo a derivare $f(x) = x$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Quindi $f'(x) = 1$. È facile verificare che questo è vero perché la funzione x è semplicemente una retta, che ha lo stesso coefficiente angolare $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre alla domanda "*quanto sta cambiando questa funzione?*" è facile vedere che la funzione cambia sempre nello stesso modo, quindi il valore della sua derivata è costante.

La funzione costante $g(x) = k$ invece che derivata ci aspettiamo che abbia? In teoria, essendo costante, la funzione non cambia mai. Quindi possiamo aspettarci che la sua derivata sia nulla. Verifichiamolo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5 - 5}{h} = 0$$

In questo caso il limite non è una forma indeterminata perché il numeratore è **esattamente** 0, mentre il denominatore si avvicinerà sempre di più a quel valore, ma non lo raggiungerà mai (come da definizione di limite).

Proviamo a derivare una funzione leggermente più complessa: $h(x) = x^2$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

La derivata in questo caso risulta essere $2x$. Ed effettivamente ha senso visto che il grafico di x^2 cambia sempre di più all'aumentare di x. Se infatti si guarda la classica forma di una parabola si può facilmente notare che più aumenta x, più il grafico *acquista pendenza*.

7.3 Regole di derivazione

È oggettivamente infattibile derivare ogni singola funzione con la definizione di derivata. Di conseguenza tramite questa ultima si ricavano delle piccole regoline che permettono poi di semplificare enormemente il calcolo:

1. Costante per una funzione:
$$(a \cdot f)' = a \cdot f'(x)$$
2. Somma e sottrazione di funzioni:
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
3. Prodotto di funzioni:
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
4. Quoziente di funzioni:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$
5. Composizione di funzioni
$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$
Il simbolo $\circ$ indica la composizione di funzioni, cioè $f \circ g = f(g(x))$.

7.4 Algebra delle derivate

Questa sottosezione sembrerà un duplicato delle regole di derivazione (Sezione: 7.3). In parte lo è, ma in realtà vuole rendere più formali quelle regole che hanno qualche piccola premessa volutamente mancante ma che in teoria dovrebbe averle rese più chiari e semplici da leggere.

Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$, e un punto $x_0 \in I$, se f e f sono derivabili in x_0 allora:

1. $f \pm g$ è derivabile in x_0 e:
$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$
2. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e:
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$
3. $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 se $g(x_0) \neq 0$ e:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Teorema

Dati due intervalli $I, J \subseteq \mathbb{R}$, due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to I$ e un punto $x_0 \in J$. Se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

7.5 Derivate funzioni elementari

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ con $a > 0$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot ln(a)}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Di seguito sono presenti le dimostrazioni di alcune di queste derivate:

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

Prendiamo una funzione $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$. Ci riduciamo a dimostrare quindi:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ora dalla definizione di derivata:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Dal binomio di newton (Sezione 3.10):

$$(x+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} \cdot h^j = x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} \cdot h^j$$

Essendo $\binom{n}{1} = n$, possiamo sostituire nel limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} \cdot h^j - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} \cdot h^{j-1} \right)$$

L'esponente di h, essendo che la sommatoria parte da $j = 2$, sarà sempre maggiore o uguale a uno ($j - 1 \geqslant 1$). Di conseguenza essendo $h \to 0$ per il limite, tutta la sommatoria va a 0:

$$n \cdot x^{n-1}$$

Qed.

In questo caso abbiamo trovato la derivata di x^n ma solo per $n \in \mathbb{N}$. In realtà possiamo provare che è la stessa identica cosa però per $n \in \mathbb{R}$:

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prendiamo una funzione $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{R}$ e $n > 0$. Ora usando sia l'esponenziale che il logaritmo in quanto sua inversa possiamo riscrivere la funzione come:

$$f(x) = x^n = e^{\ln(x^n)} = e^{n \cdot \ln x}$$

Questa ultima è derivabile per $x > 0$. Calcoliamo quindi la derivata:

$$f'(x) = \left(e^{n \cdot \ln x}\right)' = e^{n \cdot \ln x} \cdot (n \cdot \ln x)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$$

Qed.

Dimostrazione

Dobbiamo provare che:

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Chiamiamo $f(x) = \sin(x)$ e applichiamo la definizione:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Usando le formule di addizione (Sezione 3.12.9):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$$

Usando qualche limite notevole visto in precedenza (Sezione 5.7):

$$\lim_{h \to 0} \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

Qed.

Dimostrazione

Dobbiamo provare che:

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Chiamiamo $f(x) = \cos(x)$ e applichiamo la definizione:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Usando le formule di addizione (Sezione 3.12.9):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cdot(\cos(h)-1) - \sin(x)\sin(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h}$$

Usando qualche limite notevole visto in precedenza (Sezione 5.7):

$$\lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 = -\sin(x)$$

Qed.

Dimostrazione

Dobbiamo provare che:

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

In questo caso essendo:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Ci basta calcolare la derivata di un quoziente:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Che in base a come si vuole semplificare porta a due possibili risultati:

1. $$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2. $$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

7.6 Derivare un valore assoluto

Proviamo a derivare il valore assoluto di x:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

È abbastanza facile vedere che è derivabile sicuramente per tutto l'intervallo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ perché se prese singolarmente, sia x che $-x$ sono derivabili. Il problema è che non sappiamo se è derivabile in $x = 0$. Usiamo la definizione approcciando questa derivata prima da sinistra e poi da destra:

$$f'_-(0) \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$$

Essendo che ci stiamo avvicinando a 0 da sinistra ($x \to 0^-$), il valore assoluto è semplicemente $-x$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Usando lo stesso procedimento per la derivata destra:

$$f'_+(0) \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Concludiamo quindi che $|x|$ **non è derivabile** in $x = 0$ perché il valore della sua derivata destra non coincide con il valore della derivata sinistra:

$$f'_-(0) = -1 \;\neq\; 1 = f'_+(0)$$

In generale però **il valore assoluto in una funzione non rende per forza questa non derivabile**. Un classico esempio è:

$$g(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se si considera sempre l'intervallo $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ è facile notare che presi distintamente, i due tratti della funzione sono derivabili. Il problema resta sempre però il punto $x = 0$. Approcciamolo da sinistra:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

Approcciamolo ora da destra:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Ne consegue che **la funzione è derivabile** proprio perché la sua derivata destra e sinistra coincidono.

7.7 Derivate di ordine superiore

L'idea dietro le derivate di ordine superiore è il fatto che la funzione derivata di una qualsiasi funzione resta comunque una funzione. Cioè se scrivo:

$$3x^2 + 4$$

Non esiste modo di distinguere se questa è una derivata o una funzione proprio perché non c'è differenza tra queste due. Se fosse una derivata la funzione potrebbe essere tipo questa[7]:

$$f(x) = x^3 + 4x + 1$$

Ma potrebbe benissimo essere una funzione a parte e si scriverebbe come:

$$g(x) = 3x^2 + 4$$

Essendo quindi che la funzione derivata (si capisce anche dal nome) rimane comunque una normalissima funzione possiamo applicare nuovamente il concetto di derivata alla derivata stessa. Prendiamo per esempio una funzione e deriviamola una volta:

$$j(x) = 2x^5 - 3x^3 + 5x$$
$$j'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 5$$

[7] In realtà ci possono essere infinite funzioni che hanno la seguente come derivata, ma è un discorso che va affrontato poi con gli integrali

Ora possiamo applicare nuovamente il concetto di derivata alla derivata stessa (cioè j'):

$$j''(x) = 40x^3 - 18x$$

In questo caso abbiamo usato due volte il simbolo di derivata $'$ per indicare proprio il fatto che è una funzione derivata 2 volte. Ovviamente questa cosa si può iterare finché la funzione resta derivabile. Formalizziamo meglio il concetto:

Definizione

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I, esiste la derivata $f' : I \to [R]$. Se f' è derivabile in $x_0 \in I$ allora:

$$f''(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_o + h) - f'(x_0)}{h} \in R$$

In questo caso si dice che la funzione f **è derivabile due volte in $\mathbf{x_0}$**.

Ne consegue che se volgiamo definire la derivata terza di una funzione in un punto x_0, basta che esista la derivata seconda della funzione in quel punto e che questa ultima si derivabile:

$$f'''(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_o + h) - f''(x_0)}{h} \in R$$

Notazioni:

$$f', f'', f''', f^{IV}, f^{V} \cdots$$
$$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, \cdots$$

Nota: La derivata f' viene spesso chiamata *derivata prima*.

Definizione

Classe $\mathbf{C^k}$ dove $k \in \mathbb{N}$.

$$f \in C^k(I) \iff \begin{cases} f \text{ è derivabile k-volte su } I \\ f^{(k)}\text{è continua su I} \end{cases}$$

Ci basta imporre solo che $f^{(k)}$ sia continua da un teorema enunciato più avanti (Sezione 7.8) che in pratica afferma che se una funzione è derivabile (e tutte quelle prima di $f^{(k)}$ lo sono) allora la funzione è forza continua.

Le classi risultano quindi:

$$\begin{aligned} C^0(I) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua su I}\} \\ C^1(I) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile e } f' : I \to \mathbb{R} \text{ è continua}\} \\ C^2(I) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile due volte e } f'' : I \to \mathbb{R} \text{ è continua}\} \\ &\vdots \\ C^\infty(I) &:= \bigcap_k C^k(I) \end{aligned}$$

L'ultima classe comprende tutte le funzioni derivabili un numero arbitrario di volte.

Un esempio di funzione derivabile k volte:

$$h(x) = x^k|x|$$

Infatti $h \in C^k(\mathbb{R})$ ma $h \notin C^{k+1}(\mathbb{R})$.

7.8 Teoremi

Teorema

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha che:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \implies f \text{ è continua in } x_0$$

Dimostrazione

Assumendo che x_0 faccia parte dei punti di accumulazione di I ($x_0 \in \mathcal{D}(I)$), dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

o equivalentemente:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Moltiplicando e dividendo per lo stesso fattore $(x - x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = 0$$

Il primo termine è semplicemente la derivata di f nel punto x_0 mentre il secondo termine tende a zero per $x \to x_0$:

$$f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Qed.

È importante notare qui la direzione dell'implicazione: mentre se una funzione è derivabile allora è continua, NON è affatto detto che una funzione continua automaticamente sia derivabile. L'esempio classico è il valore assoluto di x, che è continuo su tutto $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x = 0$. Si può vedere la cosa come se le funzioni derivabili fossero un sottoinsieme delle funzioni continue.

7.8.1 Teorema di Fermat

Definizione

$f : A \to \mathbb{R}$

1. $x_0 \in A$ si dice punti di **massimo relativo** (o locale) se:

$$\exists r > 0 : \quad f(x) \leqslant f(x_0) \;\; \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$

2. $x_0 \in A$ si dice punti di **minimo relativo** (o locale) se:

$$\exists r > 0 : \quad f(x) \geqslant f(x_0) \;\; \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$

In pratica basta che esista un intorno di quel punto in cui tutti i valori della funzione sono più piccoli del valore della funzione nel punto stesso per fare in modo che quel punto sia un massimo relativo. La stessa cosa vale con il minimo. La differenza con i punti di massimo e di minimo assoluti è che questi ultimi devono essere maggiori o minori di tutti gli altri valori della funzione, non soltanto in un intorno scelto a piacere. Nonostante siano già scritti in precedenza riporto nuovamente la definizione:

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$:

1. $x_0 \in A$ si dice punto di **massimo assoluto** di f se:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in A$$

2. $x_0 \in A$ si dice punto di **minimo assoluto** di f se:

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in A$$

Ovviamente:

$$\begin{aligned} x_0 \text{ punto di massimo assoluto} &\implies x_0 \text{ punto di massimo relativo} \\ x_0 \text{ punto di minimo assoluto} &\implies x_0 \text{ punto di minimo relativo} \end{aligned}$$

Il seguente teorema enuncia che la derivata nei minimi e nei massimi relativi si annulla. Questo teorema torna molto utile nello studio di funzione per individuare potenziali massimi o minimi.

Teorema

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, un punto di massimo o di minimo $x_0 \in]a, b[$, se inoltre f è derivabile in x_0, allora:

$$f'(x_0) = 0$$

È essenziale che il punto x_0 si all'interno dell'intervallo. Se infatti non lo fosse (come da Figura: 25) la derivata non si annullerebbe nonostante gli estremi siano un punto di massimo e di minimo.

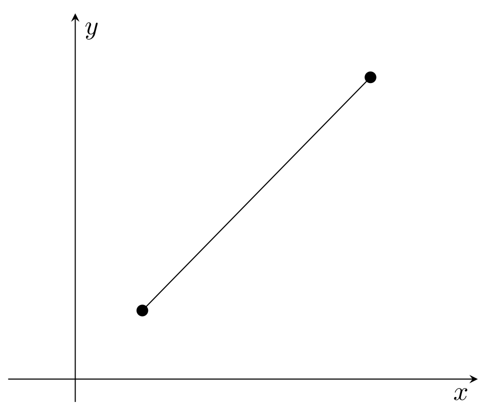


Figure 25: Caso del teorema di Fermat in cui il punto di massimo o di minimo non è interno all'intervallo e quindi la derivata non si annulla

Inoltre l'annullarsi della derivata prima in un punto x_0 è condizione **necessaria** affinché x_0 sia un punto di massimo o di minimo relativo, ma **non è sufficiente** in generale. Se prendiamo infatti la funzione $f(x) = x^3$ e la deriviamo viene $f'(x) = 3x^2$ ed è facile vedere che la derivata si annulla in $x = 0$. Se guardiamo il grafico di $f(x)$ (Figura: 26) però in $x = 0$ non è presente né un massimo né un minimo.

Dimostrazione

Dimostriamo il teorema solo per il caso dei punti di massimo. Prendiamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ che ha un punto di massimo relativo in $x_0 \in]a, b[$. Assumiamo inoltre che f sia derivabile in x_0.

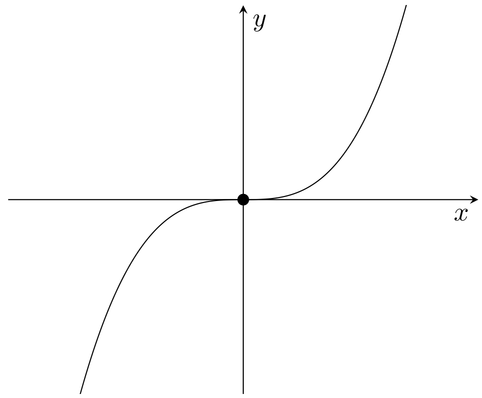


Figure 26: Grafico della funzione $f(x) = x^3$

Essendo x_0 un punto di massimo relativo:

$$\exists r > 0 : \quad f(x) \leqslant f(x_0) \ \ \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$

L'intorno $I_r(x_0)$ si può scrivere anche come:

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

Dividiamo quindi questo intervallo in due casi distinti:

1. Il primo caso considera l'intervallo ristretto a:

$$x_0 - r < x < x_0$$

La derivata sinistra di f nel punto x_0 esiste per ipotesi ed è per definizione:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per ipotesi abbiamo che $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ e per il fatto che ci stiamo avvicinando a x_0 da sinistra $x - x_0 < 0$. Ne consegue che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

E quindi per il teorema di permanenza del segno (Sezione 5.6):

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

E quindi:

$$f'_-(x_0) \geqslant 0$$

2. Il secondo caso considera l'altro pezzo di intervallo:

$$x_0 < x < x_0 + r$$

La derivata destra di f nel punto x_0 esiste per ipotesi ed è per definizione:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per ipotesi abbiamo che $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ e per il fatto che ci stiamo avvicinando a x_0 da destra $x - x_0 > 0$. Ne consegue che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

E quindi per il teorema di permanenza del segno (Sezione 5.6):

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

E quindi:

$$f'_+(x_0) \leqslant 0$$

Sempre per ipotesi f è derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_-(x_0) \geqslant 0 \\ \\ f'_+(x_0) \leqslant 0 \end{cases}$$

Essendo che il valore della derivata destra e sinistra devono coincidere per fare in modo che esista la derivata nel punto:

$$f'(x_0) = 0$$

Qed.

7.8.2 Teorema di Rolle

Teorema

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1. f è continua su $[a, b]$
2. f è derivabile su $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Allora:

$$\exists\, c \in]a, b[\, : f'(c) = 0$$

A livello grafico si può vedere questo teorema come una sorta di passaggio obbligato se si vuole andare da un punto ad un altro della stessa funzione. Cioè se ho una funzione come in figura 27 e volessi andare dal punto più a sinistra al punto più a destra sarei costretto a salire e poi scendere. Nell'istante esatto in cui smetto di salire e devo iniziare a scendere sono in un punto "piatto": ed è proprio qui che la derivata si annulla.

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare il teorema di Rolle. Prendiamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Assumiamo come ipotesi le premesse del teorema:

1. f è continua su $[a, b]$
2. f è derivabile su $]a, b[$

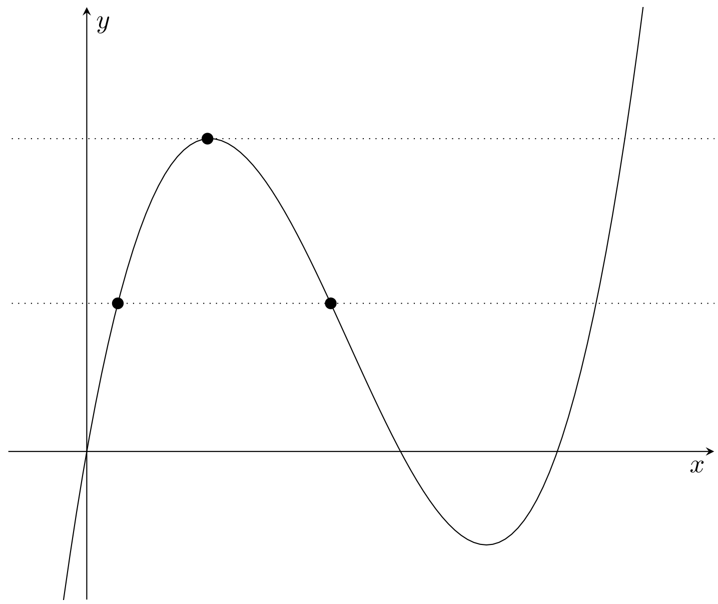


Figure 27: Grafico per visualizzare il teorema di Rolle

3. $f(a) = f(b)$

Dal teorema di Weierstrass (Sezione: 6.3) f assume il massimo e il minimo assoluti in $[a, b]$:

$$\exists x_0, x_1 \in [a, b]$$

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x) \geqslant f(x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Possiamo dividere quindi la dimostrazione in due casi in base a dove cadono questi punti di massimo e di minimo:

1. x_0 e x_1 cadono entrambi sugli estremi a, b. Cioè

   $$\{x_0, x_1\} = \{a, b\}$$

   Per il fatto che x_0 e x_1 sono il massimo e il minimo:

   $$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$$

   Dall'ipotesi numero 3, cioè che $f(a) = f(b)$ ne consegue che f, essendo "intrappolata" tra $f(x_0)$ e $f(x_1)$, è una funzione costante. Cioè:

   $$\exists k \in \mathbb{R} : f(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$$

   Ne consegue che la derivata, essendo la derivata di una costante:

   $$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

2. $x_0 \in]a, b[$ oppure $x_1 \in]a, b[$ oppure entrami cadono dentro l'intervallo. Ci basta che solo una cada. Assumiamo per esempio che quello che cade all'interno dell'intervallo è x_0.

Essendo un punto di massimo assoluto è anche un massimo relativo. Dal teorema di Fermat (Sezione: 7.8.1):

$$f'(x_0) = 0$$

Quindi $c := x_0$ e abbiamo finito.

Qed.

È fondamentale che la funzione sia derivabile in $]a, b[$ perché se non lo fosse il teorema non si applicherebbe. Per esempio in figura 28 è rappresentata la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

In questo caso nel punto $x = 1$ la funzione non è derivabile infatti:

$$f'_-(1) = 1 \;\neq\; f'_+(1) = -1$$

E infatti non esiste un punto in cui la derivata si annulla.

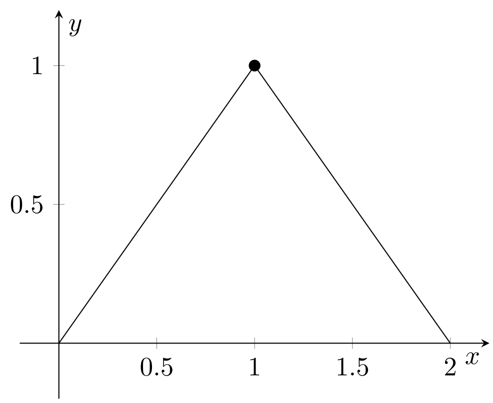


Figure 28: Caso di una funzione non derivabile nel teorema di Rolle

7.8.3 Teorema di Lagrange

Teorema

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1. f è continua su $[a, b]$
2. f è derivabile su $]a, b[$

Allora:

$$\exists\, c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Un esempio grafico di questo teorema è quello riportato in figura 29. Il termine:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

può essere considerato come la pendenza media del percorso (che in questo caso è la funzione) tra il punto a e il punto b. Esiste quindi, per questo teorema, un ulteriore punto in cui la tangente sarà esattamente come questa pendenza media.

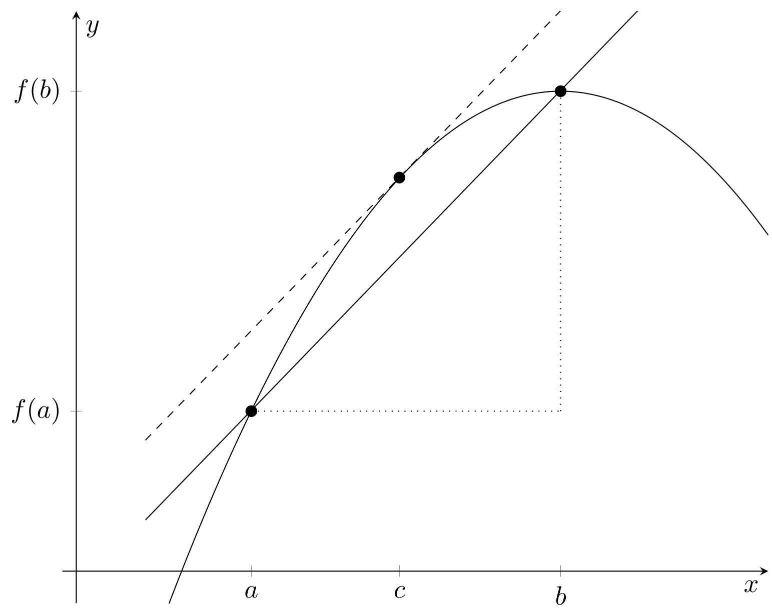


Figure 29: Caso di una funzione non derivabile nel teorema di Rolle

Dimostrazione

Per provare questo teorema è necessario utilizzare il teorema di Rolle (Sezione: 7.8.2). Purtroppo si tende a creare molta confusione tra questi teoremi perché si può vedere questo come un'estensione del teorema di Rolle e quindi la dimostrazione di quest'ultimo si potrebbe fare a partire da questo. Ma come già detto il teorema di Lagrange si basa proprio sul teorema di Rolle, quindi nonostante possa essere visto come una generalizzazione, il teorema di Rolle non può essere provato a partire da questo teorema.

Dobbiamo dimostrare il teorema di Lagrange. Prendiamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e assumiamo le seguenti proprietà come ipotesi:

1. f è continua su $[a, b]$
2. f è derivabile su $]a, b[$

Scegliamo una funzione ausiliaria $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che:

$$g(x) = f(x) + k \cdot x \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Da ipotesi 1 g è continua su $[a, b]$ perché è fatta da una somma di funzioni continue e da ipotesi 2 g è derivabile su $]a, b[$ perché è fatta da somma di funzioni derivabili.
Vogliamo scegliere $k \in \mathbb{R}$ in modo che si possa applicare il teorema di Rolle:

$$g(a) = f(a) + k \cdot a$$

$$g(b) = f(b) + k \cdot b$$

Scegliamo quindi k in modo che:

$$g(a) = g(b)$$

$$f(a) + k \cdot a = f(b) + k \cdot b$$

$$k(b-a) = f(a) - f(b)$$

$$k = \frac{f(a) - f(b)}{b-a}$$

Dal teorema di Rolle:

$$\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$$

Quindi:

$$g'(c) = 0 \implies f'(c) + k = 0$$

E infine:

$$f'(c) = -k = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Corollario: se una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, continua e derivabile su $]a, b[$ ha derivata sempre zero per tutti i punti del dominio, allora la funzione è costante.

Dimostrazione

Dimostriamo il corollario: prendiamo una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in modo che sia costante, continua e derivabile in $]a, b[$. Assumiamo che la sua derivata sia sempre 0. Se prendiamo due punti casuali nell'intervallo $]a, b[$:

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[: x_1 < x_2$$

Si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione (in quanto $[x1, x2] \subseteq]a, b[$ e quindi la funzione rispetta tutte le premesse del teorema):

$$f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$$

Dal teorema quindi:

$$\exists c \in]x_1, x_2[: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

Dall'ipotesi $f'(c)$ è sempre 0, e quindi:

$$f(x_2) = f(x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in]a, b[$$

Qed.

Le ipotesi del corollario sono importanti perché se non vengono rispettate non funzione più. Prendiamo come esempio la funzione

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

La sua derivata sarà:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Tuttavia:

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Non vi è in realtà contraddizione con il corollario perché il dominio di f è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, che non è un intervallo. La funzione è effettivamente costante sia a destra che a sinistra di 0, ma la costante è diversa. Il grafico infatti risulta come da figura 30.

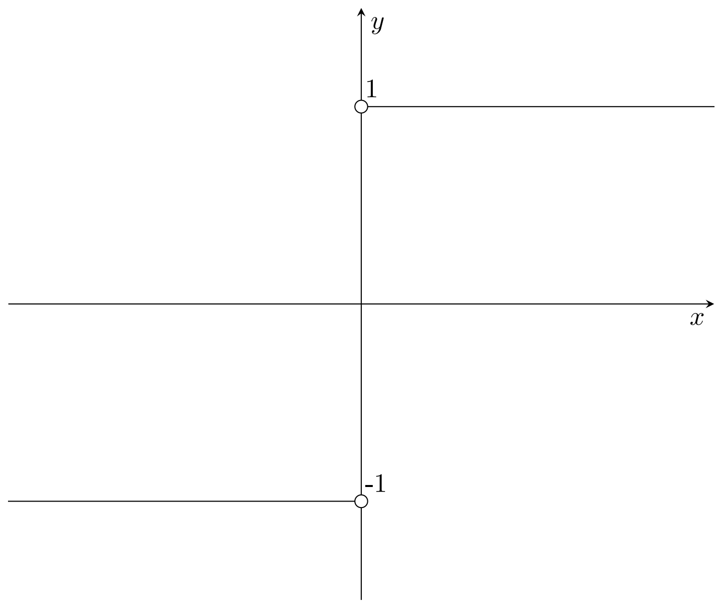


Figure 30: Caso di una funzione che non ha il dominio in un intervallo nel corollario di Lagrange

7.8.4 Teorema di Cauchy

Teorema

Date due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1. f, g è continue su $[a, b]$
2. f, g è derivabili su $]a, b[$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora:

$$\exists\, c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

La condizione che $g(b) - g(a) \neq 0$ è intrinseca alla premessa numero 3. Se infatti fosse che $g(b) - g(a) = 0$ diventerebbe $g(b) = g(a)$ che in combinazione con le premesse 1 e 2 del teorema permetterebbe l'applicazione del teorema di Rolle (Sezione: 7.8.2) e quindi $\exists d \in]a, b[: g'(d) = 0$ che è in contraddizione con l'ipotesi numero 3.

Per la dimostrazione si potrebbe pensare erroneamente che applicando il teorema di Lagrange prima al numeratore e poi al denominatore si possa dimostrare questo teorema. Le premesse ci permettono di applicare Lagrange, ma nessuno ci assicura che il punto in cui si annulla f' è lo stesso punto in cui si annulla g':

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{\frac{g(b) - g(a)}{b - a}} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

Nessuno infatti ci assicura che $c_1 = c_2$, risulta quindi necessario fare una dimostrazione a parte:

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare il teorema di Cauchy. Prendiamo due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e assumiamo le seguenti proprietà come ipotesi:

1. f, g è continue su $[a, b]$
2. f, g è derivabili su $]a, b[$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Consideriamo ora una funzione ausiliaria $h : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x) + k \cdot g(x) \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Per ipotesi 1 e 2 h è continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Vogliamo applicare il teorema di teorema di Rolle ad h:

$$h(a) = f(a) + k \cdot g(a)$$

$$h(b) = f(b) + k \cdot g(b)$$

Dobbiamo quindi scegliere k in modo che:

$$h(a) = h(b)$$

$$f(a) + k \cdot g(a) = f(b) + k \cdot g(b)$$

$$f(b) - f(a) = k(g(a) - g(b))$$

Per ipotesi 3 so che $g(a) - g(b) \neq 0$, quindi posso dividere:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$$

Applichiamo quindi il teorema di Rolle ad h:

$$\exists c \in]a, b[: h'(c) = 0$$

Cioè:

$$h'(c) = f'(c) + k \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = -k \cdot g'(c)$$

E quindi:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Qed.

7.8.5 Legame tra derivata e monotonia di una funzione

Questo teorema è fondamentale nello studio di funzione perché permette. in base al segno della derivata, di determinare la monotonia della funzione in esame.

Teorema

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ se è derivabile su $]a, b[$ allora:

1. $$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in]a, b[\iff f \text{ è crescente su }]a, b[$$

   Vale anche per il caso $\leqslant$:

   $$f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in]a, b[\iff f \text{ è decrescente su }]a, b[$$

2. $$f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[\implies f \text{ è strettamente crescente su }]a, b[$$

   Vale anche il caso $<$:

   $$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[\implies f \text{ è strettamente decrescente su }]a, b[$$

Nei casi 2 e 3 non vale l'implicazione contraria perché alcune funzioni strettamente crescenti o strettamente decrescenti possono avere anche derivata nulla in un punto, tipo x^3 e $-x^3$ in $x = 0$.

Dimostrazione

Prendiamo una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e assumiamo come ipotesi che sia derivabile su $]a, b[$.

1. Caso $\implies$: Dobbiamo provare che:

   $$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in]a, b[\implies f \text{ è crescente su }]a, b[$$

   Assumiamo come ipotesi che $f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in]a, b[$ per dimostrare che:

   $$f \text{ è crescente su }]a, b[$$

   In pratica dobbiamo provare che:

   $$\forall x_1, x_2 \in]a, b[: x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

   Applichiamo il teorema di Lagrange (Sezione: 7.8.3) alla funzione $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ con il dominio quindi ristretto a $[x_1, x_2]$:

   $$\exists c \in]x_1, x_2[: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

   Per ipotesi $f'(c) \geqslant 0$ ed essendo sempre per ipotesi $x_2 - x_1 > 0$:

   $$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$$

   $$f(x_2) \geqslant f(x_1)$$

Quindi abbiamo concluso questo caso. Nel caso del $\leqslant$ si fa uguale.

Caso $\Longleftarrow$: In questo caso l'uso diretto del teorema di Lagrange non permette di concludere quello che vogliamo dimostrare, infatti non riuscirei a dimostrare la cosa per tutti i punti. Dobbiamo provare che:

$$f \text{ è una funzione crescente su }]a, b[\implies \forall x \in]a, b[\ f'(x) \geqslant 0$$

Assumiamo che f sia crescente su $]a, b[$ per dimostrare:

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Essendo crescente:

$$\forall x_0 \in]a, b[: x > x_0 \implies f(x) \geqslant f(x_0)$$

Visto che $x - x_0 > 0$ e $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, ne consegue:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

Essendo per ipotesi derivabile e dal teorema di permanenza del segno (Sezione: 5.6):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

E questo vale $\forall x_0 \in]a, b[$, quindi abbiamo finito.

2. Questo caso si fa esattamente come il punto 1, ma lo riporto lo stesso. Dobbiamo provare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[\implies f \text{ è strettamente crescente su }]a, b[$$

Assumiamo come ipotesi che $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a, b[$ per dimostrare che:

$$f \text{ è strettamente crescente su }]a, b[$$

In pratica dobbiamo provare che:

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[: x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Applichiamo il teorema di Lagrange (Sezione: 7.8.3) alla funzione $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$:

$$\exists c \in]x_1, x_2[: \ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Per ipotesi $f'(c) > 0$ ed essendo sempre per ipotesi $x_2 - x_1 > 0$:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Quindi abbiamo concluso questo caso. Nel caso del $<$ si fa uguale.

Qed.

Proposizione: Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ che sia derivabile su $]a, b[$ se vale che:

1. $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. Posto $N = \{x \in]a, b[\mid f'(x) = 0\}$, N è un insieme finito.

Allora:

$$f \text{ è strettamente crescente}$$

Vale anche per il caso in cui $f'(x) \leqslant 0 \ \forall x \in]a, b[$, che però rende la funzione *strettamente decrescente*.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare la proposizione appena enunciata. Prendiamo una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ che sia derivabile su $]a, b[$. Assumiamo come ipotesi che valgono le seguenti proprietà:

1. $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. Posto $N = \{x \in]a, b[\mid f'(x) = 0\}$, N è un insieme finito.

Dalla prima ipotesi e dal teorema appena enunciato:

$$f \text{ è crescente su }]a, b[$$

Assumiamo come ipotesi che f NON sia strettamente crescente e riduciamoci a dimostrare l'assurdo[a]. Essendo per che f non è strettamente crescente:

$$\exists x_1, x_2 \in]a, b[: \ x_1 < x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

Siccome però f è crescente:

$$\forall x \in]x_1, x_2[: \ f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

Ma essendo $f(x_1) = f(x_2)$:

$$f \text{ è costante su } [x_1, x_2]$$

Di conseguenza:

$$f'(x) = 0 \quad \forall]x_1, x_2[$$

Che però è in contraddizione con l'ipotesi 2. Usando quindi una *not eliminazione*[b] abbiamo provato l'assurdo! Qed.

[a] RAAAAAAA
[b] Deduzione naturale insegna

7.8.6 I teoremi di De L'Hôpital

Per dimostrare i teoremi di De L'Hôpital è necessario il seguente lemma che "traduce" la nozione di limite usando le successioni:

Lemma

Data una funzione $h : A \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ allora:

$$l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

1.
$$\lim_{x \to x_0^-} h(x) = l \iff \forall (x_n)_n \subseteq A,\, x_n < x_0 \;\; \forall n \text{ tale che: } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \text{ si ha: } h(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

2.
$$\lim_{x \to x_0^+} h(x) = l \iff \forall (x_n)_n \subseteq A,\, x_n > x_0 \;\; \forall n \text{ tale che: } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \text{ si ha: } h(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

Senza dimostrazione da 1 e 2 segue che:

3.
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \iff \forall (x_n)_n \subseteq A,\, x_n \neq x_0 \;\; \forall n \text{ tale che: } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \text{ si ha: } h(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

Da qui nasce un criterio per mostrare che non esiste il limite per un punto di una funzione. Cioè se voglio far vedere che:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} h(x)$$

Mi basta trovare due successioni che tendono entrambe ad x_0:

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$$
$$y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$$

E poi calcolare il loro limite e far vedere che i valori non coincidono. Di conseguenza il limite non esiste perché non è unico.

$$h(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l1$$
$$h(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l2$$
$$l1 \neq l2$$

Teorema

Caso 1 limite al finito: Preso un intervallo $I \subseteq R$ e un punto $x_0 \in \mathring{I}$ se:

1. Due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue su I e con $f(x_0) = g(x_0) = 0$
2. f, g derivabili in $I \backslash \{x_0\}$ e $g'(x) \neq 0$ se $x \in I \backslash \{x_0\}$
3. $$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Allora:
$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Alcune considerazioni importanti da fare:

- Non serve specificare che $g(x) \neq 0$ se $x \in I \backslash \{x_0\}$ perché è già intrinseco nella seconda ipotesi del teorema. Supponiamo infatti che:

$$\exists x_1 \in I : x_1 \neq x_0 \wedge g(x_1) = 0$$

  La funzione $g : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ è continua su $[x_0, x_1]$, è derivabile in $]x_0, x_1[$ e inoltre, per quanto appena assunto e per la prima ipotesi del teorema, $g(x_0) = 0 = g(x_1)$. Ne consegue che dal teorema di Rolle (Sezione: 7.8.2):

$$\exists x \in]x_0, x_1[: \; g'(c) = 0$$

  Che però è in contrasto con la seconda ipotesi del teorema.

- È estremamente importante la direzione dell'implicazione: se esiste il limite del rapporto delle derivate allora esiste il limite del rapporto delle funzioni ed è uguale al limite del rapporto delle derivate. Se però il limite delle derivate non esiste, il teorema non si può applicare. Nessuno però ci dice il limite in sé non esista. Non vale quindi il contrario. Se esiste il limite di un rapporto di funzioni non è detto che esista il limite del rapporto delle derivate.

  Consideriamo le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x$$

  Facciamo vedere che:

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  Ma che tuttavia:

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  Se infatti sostituiamo le funzioni con la loro definizione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

  Fa 0 in quanto $x \to 0$ e :

$$0 \leqslant \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$$

  Proviamo ora a calcolare il limite delle derivate assumendo che $x \neq 0$. Calcoliamo prima le derivate delle funzioni singolarmente:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \cdot \cos \left(\frac{1}{x} \right) \cdot -\frac{1}{x^2} = 2x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right) + \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$g'(x) = 1$$

  Ne consegue che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} 2x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right) + \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

  Il termine $2x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ va a 0 come abbiamo già visto, mentre il termine $\cos \left(\frac{1}{x} \right)$ non ha limite (dimostrato dopo). Ne consegue che non esiste il limite del rapporto delle derivate nonostante il

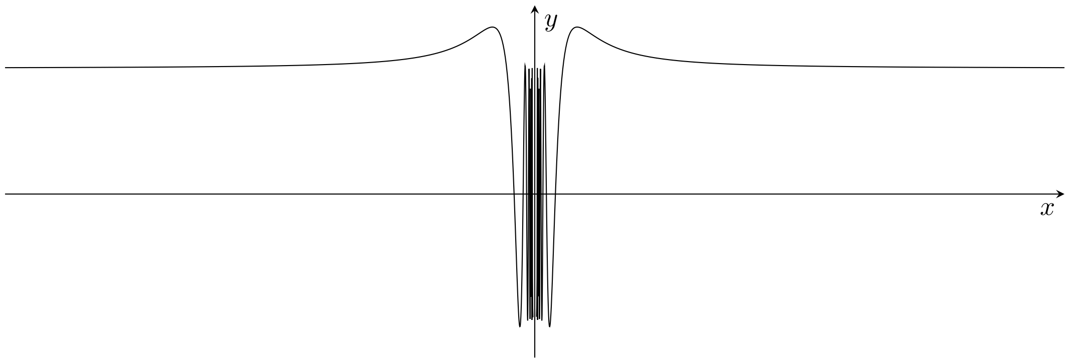


Figure 31: Grafico di $2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

limite del rapporto delle funzioni esiste. Per completezza il grafico del rapporto delle funzioni e rappresentato in figura 31.

Per mostrare che:

$$\nexists \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Usiamo il lemma enunciato qualche pagina sopra. Assumiamo che esiste il limite (chiamiamo il suo valore l) e riduciamoci a dimostrare l'assurdo. Dal lemma:

$$\forall (x_n)_n \subseteq A,\ x_n \geqslant x_0 \ \ \forall n \text{ tale che: } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \text{ si ha: } h(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

Ora mostreremo che esistono due successioni tali che tendono entrambe a 0 ma sulla funzione hanno limiti diversi. La prima successione:

$$x_n = \frac{1}{2\pi \cdot n} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Se calcoliamo il limite della funzione:

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi \cdot n}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \cos(2\pi \cdot n) = 1$$

Questo perché $n \in \mathbb{N}$ facendo parte di una successione è per forza un numero intero. Ne consegue che anche se tende a $+\infty$ l'argomento del coseno avrà sempre multipli interi di 2π, e di conseguenza farà sempre 1[8]. Prendiamo ora la seconda successione:

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot n} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Calcolando il limite e notando sempre che $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot n\right) = 0$$

[8] Questa è una mia interpretazione perché sugli appunti non è specificato e non si capisce come faccia a fare 1, però mi sembra l'unica con un minimo di senso

Visto quindi che i due limiti non sono uguali segue che:

$$\nexists \lim_{x \to 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

E quindi:

$$\nexists \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dimostriamo ora il teorema:

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare il teorema appena enunciato. Prendiamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathring{I}$. Assumiamo inoltre le seguenti ipotesi:

1. Due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue su I e con $f(x_0) = g(x_0) = 0$
2. f, g derivabili in $I \backslash \{x_0\}$ e $g'(x) \neq 0$ se $x \in I \backslash \{x_0\}$
3. $$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Dobbiamo provare che:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In altre parole:

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Proviamo solo uno dei due tanto l'altro è analogo. Scegliamo quindi di provare:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

A tal fine, usiamo il lemma precedente: ci riduciamo quindi a provare:

$$\forall (x_n)_n \subseteq I,\ x_n > x_0 \ \ \forall n \text{ tale che: } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \text{ si ha: } \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$$

Assumiamo le premesse per dimostrare che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$$

Per ipotesi 1 $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Di conseguenza, in quanto nulli, possiamo sommarli e sottrarli a piacere:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)}$$

Se ora restringiamo il dominio alle funzioni $f, g : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ possiamo applicare il teorema di Cauchy (Sezione: 7.8.4):

$$\exists c_n \in]x_0, x_n[\ \text{ tale che } \ \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

Essendo c_n "intrappolata" tra x_0 e x_n:

$$x_0 < c_n < x_n$$

Ed essendo per ipotesi:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$$

Ne consegue che:

$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$$

Dall'ipotesi 3 del teorema:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Dunque dal lemma (ricordiamoci che $c_n \to x_0$ e che $x_0 < c_n$):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$$

Ricapitolando:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$$

Dal lemma:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analogamente si prova che:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Da cui:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Qed.

Dei seguenti teoremi non vi è la dimostrazione:

Teorema

Caso 2 limite al finito: Prese due funzioni $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabili:

1. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

2. $$g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$$

3. $$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to x_0$
- $$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema

Caso 3 destra limite al finito, *non nel punto "secco" ma da destra* : Prese due funzioni $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabili:

1. $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty \quad \text{(oppure 0)}$$

2. $$g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]a, b[$$

3. $$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to a^+$
- $$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Caso 3 sinistra limite al finito: Prese due funzioni $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabili:

1. $$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty \quad \text{(oppure 0)}$$

2. $$g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]a, b[$$

3. $$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to b^-$
- $$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema

Caso 4 destra limite all'infinito: Prese due funzioni $f, g :]c, +\infty[\to \mathbb{R}$ derivabili:

1. $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty \quad \text{(oppure 0)}$$
2. $$g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]c, +\infty[$$
3. $$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to +\infty$
- $$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Caso 4 sinistra limite all'infinito: Prese due funzioni $f, g :] - \infty, d[\to \mathbb{R}$ derivabili:

1. $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = \pm\infty \quad \text{(oppure 0)}$$
2. $$g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in] - \infty, d[$$
3. $$\exists \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to -\infty$
- $$\exists \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione gerarchia degli infiniti: Come già visto nel capitolo dei limiti e in particolare nella sezione 5.10, esiste una così detta "*gerarchia degli infiniti*". In pratica alcune funzioni, quando tendono ad infinito, sono più veloci o più lente di altre. Il modo corretto per definire comunque questo concetto di "più veloce" e "più lento" è tramite un rapporto di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono entrambe a $+\infty$:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & g \text{ cresce più velocemente di } f \\ +\infty & f \text{ cresce più velocemente di } g \\ l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \end{cases}$$

La gerarchia riportata nella sezione dei limiti è la seguente:

1. $\log_a^m(x)$ con $a > 1$ e $m \in \mathbb{N}$
2. $p(x)$

3. a^x con $a > 1$

4. x^x

Ora ci poniamo l'obiettivo di dimostrarla:

1. Assumendo come polinomio $p(x) = x^\alpha$ con $\alpha > 0$, dimostriamo che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_\beta^m(x)} = +\infty$$

Usando De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_\beta^m(x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{m \cdot \log_\beta^{m-1}(x) \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln(\beta)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot x}{\dfrac{m}{\ln(\beta)} \cdot \log_\beta^{m-1}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot x^\alpha}{\dfrac{m}{\ln(\beta)} \cdot \log_\beta^{m-1}(x)}$$

Dopo quindi un'iterazione di De L'Hôpital ci siamo ridotti a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_\beta^m(x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot \ln(\beta)}{m} \cdot \frac{x^\alpha}{\log_\beta^{m-1}(x)}$$

Abbiamo quindi abbassato il grado del logaritmo al denominatore di 1. Ripetendo questo processo m volte:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_\beta^m(x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \cdots \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha! \cdot \ln^m(\beta)}{m!} \cdot \frac{x^\alpha}{1}$$

Ne consegue che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha! \cdot \ln^m(\beta)}{m!} \cdot \frac{x^\alpha}{1} = \frac{\alpha! \cdot \ln^m(\beta)}{m!} \cdot \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$

Finito.

2. Dimostriamo che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x} = 0$$

Usando De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot x^{(\alpha-1)}}{\beta^x \cdot \ln(\beta)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{(\alpha-2)}}{\beta^x \cdot \ln^2(\beta)} \overset{\mathrm{H}}{=} \cdots$$

Iterando l'utilizzo di De L'Hôpital per α volte si arriva a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha!}{\ln^\alpha(\beta)} \cdot \frac{1}{\beta^x} = \frac{\alpha!}{\ln^\alpha(\beta)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\beta^x} = \frac{\alpha!}{\ln^\alpha(\beta)} \cdot 0 = 0$$

Finito.

3. Dimostriamo che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$$

Possiamo riscrivere il limite come:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^x$$

Essendo a un numero fisso maggiore di 1, mentre x va a $+\infty$, ci sarà un momento in cui $x > 2a$, ne consegue che $\frac{x}{a} \geqslant 2$, quindi:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^x \geqslant 2^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Finito.

8 Serie di Taylor

Le serie di Taylor sono uno strumento potentissimo e bellissimo allo stesso tempo. Il loro scopo è approssimare una funzione generica intorno ad un punto. Il fatto è che questa approssimazione è data soltanto da polinomi, che sono la cosa più bella in matematica perché tutte le operazioni su di loro (limiti, derivate, ecc.) sono estremamente semplici.

Purtroppo la matematica viene spesso spiegata così velocemente che non ci si ferma mai a pensare quanto effettivamente certi concetti siano belli ed importanti. Le serie di Taylor sono importanti in matematica, ma anche in fisica in quanto approssimare funzioni non polinomiali in polinomi rende tutti i problemi estremamente più semplici. Vengono usate moltissimo in ingegneria e soprattutto per calcolare il valore di alcune funzioni.

Facciamo qualche esempio perché credo che la loro importanza vada giustificata il più possibile prima di imparare a memoria un qualsiasi teorema che le definisce:

1. **Calcolo delle funzioni trigonometriche:** Mentre imparavate goniometria avrete sicuramente notato che esistono dei così detti *angoli notevoli* sulla circonferenza che presi come argomenti nelle funzioni sin e cos danno dei valori "belli". Un esempio è $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Avrete inoltre sicuramente notato che su quasi tutte le calcolatrici è presente la funzione sin. Avete mai provato a mettere valori non notevoli al suo interno? Perché se per esempio mettiamo come argomento (in radianti) 0.2:

$$\sin(0.2) = 0.1986693307950612\cdots$$

Eppure non è un angolo notevole e nessuno ha definito un modo per calcolare il valore del seno in 0.2. Cosa si fa? Una media? Oppure si divide un angolo in che si ha già in tante parti e si prova a fare una media con quello. Nessuno di questi ragionamenti ha molto senso a livello matematico. Quello che si fa realmente è approssimare la funzione *seno* intorno al punto dato dall'argomento, e poi si calcola il valore usando l'approssimazione in quanto sappiamo calcolare i polinomi. In questo caso (tranquilli che poi più avanti spiego tutto):

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^8)$$

Che se proviamo a calcolare sostituendo 1 ad x viene:

$$0.2 - \frac{0.0008}{6} + \frac{0.00032}{120} \approx 0.1986693333\cdots$$

Che è estremamente vicino al valore originale, e ci è bastato prendere solo 3 termini.

2. **Calcolo dei limiti:** Un altro esempio in cui queste serie tornano estremamente utili è nel calcolo dei limiti. Probabilmente concorderete con me che calcolare il seguente limite non è affatto semplice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(\sin(x)) + e^{x\sin x} - 3}{x^4}$$

Ed effettivamente con gli strumenti attuali non è semplice. Ma se usiamo le serie di Taylor diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{3}{4}$$

Sicuramente ora è molto ma molto più semplice da calcolare. Ovviamente ho saltato molti passaggi è quella $o(x^4)$ non l'ho spiegata, però siamo riusciti a calcolare un limite che prima non sapevamo fare.

8.1 Confronto di infinitesimi

Definizione

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $f(x)$ si dice **infinitesimo** per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

L'infinitesimo è sempre in relazione ad un punto, in questo caso x_0. Di solito si omette di dire il punto solo se questo coincide con l'origine. Esempi:

- $x^3,\ x^5 - x^2,\ \sin x^3,\ \tan^2 x$ sono infinitesimi per $x \to 0$
- $x^5 - x^2$ è anche un infinitesimo per $x \to 1$, mentre $x^3,\ \sin x^3,\ \tan^2 x$ no.

L'idea del confronto di infinitesimi è la stessa del confronto di infiniti (Sezione: 5.10), semplicemente invece di avere $x \to +\infty$ abbiamo $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Date due funzioni:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$
$$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Che quindi sono infinitesimi per x_0, se esiste:

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora si hanno i seguenti casi:

1. $L = 0 \implies f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.
2. $0 < L \in \mathbb{R} \implies f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi equivalenti.
3. $L = +\infty \implies g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $f(x)$.

8.2 La notazione *o*-piccolo

Definizione

Date le seguenti:

1. Due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$
2. Un punto $x_0 \in \mathcal{D}(A)$
3. $f(x) \neq 0 \quad \forall A \backslash \{x_0\}$
4. $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Si dice che g è un ***o*-piccolo** di f per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

In questo caso si scrive:

$$g(x) = o(f(x)) \ \text{ per } x \to x_0$$

Se il punto x_0 coincide con l'origine si omette il "per $x \to 0$"

In pratica $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $f(x)$ e quindi va a 0 ”più velocemente”. Per esempio:

- $4x^4 = o(x^2)$ in quanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4x^2 = 0$$

- $\sin^3 x = o(x^2)$ in quanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim_{x\to 0} x \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 0 \cdot 1 = 0$$

- Ma $x^3 \neq o(\sin^3 x)$, infatti sono infinitesimi equivalenti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3} = \frac{1}{1} = 1$$

- $(x^6 - x^4)^2 = o(x-1)$ per $x \to 1$ in quanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^6 - x^4)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^8(x^2-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^8(x+1)^2(x-1) = 1 \cdot 2^2 \cdot 0 = 0$$

- $x^n = o(x^m) \quad \forall m \in \mathbb{N} : m < n$ in quanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0$$

Direi che $g(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ significa che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{1} = 0$$

Cioè $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$, che è un altro modo per dire che g è un infinitesimo per $x \to x_0$

8.2.1 Proprietà algebriche degli *o*-piccolo

Di seguito c’è un elenco delle proprietà algebriche degli *o-piccolo*, si assume $n, m \in \mathbb{N}$:

1. $f = o(x^n) \implies f = o(x^m)$ con $m < n$, dimostriamolo:

   Assumiamo $f = o(x^n)$ per dimostrare:

$$f = o(x^m)$$

   Cioè:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} = 0$$

   Se facciamo qualche sostituzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^n} \cdot \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} \cdot \frac{f(x)}{x^n}$$

   Per ipotesi, in quanto $f(x) = o(x^n)$:

$$\lim_{x\to 0} x^{n-m} \cdot \frac{f(x)}{x^n} = 0 \cdot 0 = 0$$

2. $o(x^n) \pm o(x^n)$ è un $o(x^n)$. Nel senso che:

$$f_1 = o(x^n), \quad f_2 = o(x^m) \implies f_1 \pm f_2 = o(x^n)$$

3. $x^m \cdot o(x^n)$ è un $o(x^{n+m})$

4. $o(x^m) \cdot o(x^n)$ è un $o(x^{n+m})$

5. $(o(x^n))^m$ è un $o(x^{n \cdot m})$. La dimostrazione segue del punto 4.

6. $o(o(x^4))$ è un $o(x^n)$. Nel senso che:

$$g = o(f) \text{ e } f = o(x^n) \implies g = o(x^n)$$

   Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x^n} = 0 \cdot 0 = 0$$

7. $o(x^n + o(x^m))$ è un $o(x^n)$ con $m \geqslant n$. Nel senso che:

$$f = o(x^n + g(x)) \;\; g(x) = o(x^m) \implies f = o(x^n)$$

   Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + g(x)} \cdot \frac{x^n + g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + g(x)} \cdot \left(1 + \frac{g(x)}{x^n}\right)$$

   Dalle ipotesi e dalla definizione di o-piccolo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + g(x)} \cdot \left(1 + \frac{g(x)}{x^n}\right) = 0 \cdot (1 + 0) = 0$$

8. $o(x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots) = o(x^n)$, con $m > 0, \alpha, \beta \cdots \in \mathbb{R}$. Cioè in pratica l'$o$-piccolo di un polinomio è l'o-piccolo del grado più basso.

$$o(\text{polinomio}) = o(\text{grado più basso})$$

   Dimostriamolo:

$$f = o(x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots) \implies f = o(x^n)$$

   Assumiamo $f = o(x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots)$ per dimostrare $f = o(x^n)$. Per la definizione di o-piccolo ci siamo ridotti a dimostrare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

   Che manipolato un po':

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots} \cdot \frac{x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots}{x^n} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots} \cdot (1 + \alpha x^m + \beta x^p + \cdots)$$

   Che per ipotesi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots} \cdot (1 + \alpha x^m + \beta x^p + \cdots) = 0 \cdot (1 + 0 + 0 + \cdots) = 0$$

Vale anche il contrario: $o(x^n) = o(x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots)$, con $m > 0, \alpha, \beta \cdots \in \mathbb{R}$. Dimostriamolo:

$$f = o(x^n) \implies f = o(x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots)$$

Assumiamo $f = o(x^n)$ per dimostrare $f = o(x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots)$, cioè:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots} = 0$$

Che moltiplicando e dividendo per gli stessi termini e usando l'ipotesi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{x^n + \alpha x^{n+m} + \beta x^{n+p} + \cdots} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{1}{1 + \alpha x^m + \beta x^p + \cdots} = 0 \cdot \frac{1}{1 + 0 + 0 + \cdots} = 0$$

9. $\dfrac{o(x^n)}{x^m} = o(n^{n-m})$ se $m \leqslant n$. Infatti:

$$f = \frac{o(x^n)}{x^m} \implies f = o(n^{n-m})$$

Assumendo $f = \dfrac{o(x^n)}{x^m}$, cioè $x^m \cdot f = o(x^n)$, per dimostrare $f = o(n^{n-m})$. Che equivale a dimostrare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{n-m}} = 0$$

Manipolando e usando l'ipotesi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{n-m}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) \cdot x^m}{x^n} = 0$$

Vale anche il contrario: se $g(x) = o(x^{n-m})$ allora $g(x) = \dfrac{o(x^n)}{x^m}$. In pratica dobbiamo dimostrare che $x^m \cdot g(x) = o(x^n)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^m \cdot g(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^{n-m}} = 0$$

10. $o(k \cdot x^n) = o(x^n)$ con $k \in \mathbb{R} : k \neq 0$. Infatti con $f = o(k \cdot x^n)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{k \cdot x^n} \cdot k = 0 \cdot k = 0$$

Analogamente vale viceversa.

11. Se due funzioni f, g sono infinitesimi per $x \to x_0$ e sono infinitesimi dello stesso ordine:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

Allora:

$$o(f(x)) = o(g(x))$$

Infatti dimostriamo che $h(x) = o(f) \implies h(x) = o(g)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \cdot l = 0$$

Ovviamente vale anche il contrario perché:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \cdot \frac{1}{l} = 0$$

12. Data una funzione $h(x)$ e $k \in \mathbb{R} : k \neq 0$:

$$h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} k \neq 0 \implies o(h(x) \cdot x^n) = o(x^n)$$

Infatti x^n e $h(x) \cdot x^n$ sono infinitesimi equivalenti in quanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) \cdot x^n}{x^n} = \lim_{x \to 0} h(x) = k \neq 0$$

8.3 Sviluppo di Taylor

8.3.1 Idea intuitiva

Prima di dare la definizione di qualche teorema tirato fuori dal nulla vorrei cercare di dare l'idea dietro queste serie di Taylor, in modo che poi, quanto si andranno a leggere ed effettivamente studiare i teoremi successivi, si abbia comunque una vaga idea del loro significato e da dove deriva il tutto.

Prendiamo una funzione che vogliamo approssimare, per esempio $f(x) = e^x$ e scegliamo un punto in cui approssimare questa funzione, per esempio $x_0 = 0$. Ora non possiamo partire subito con 200 termini di approssimazione, ma dobbiamo costruire il polinomio piano piano in modo che tutti i passaggi abbiano effettivamente un senso.

Proviamo quindi a trovare la migliore approssimazione di **grado 0** per $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$. Cioè in pratica quello che vogliamo fare è trovare un polinomio $p_0(x)$ di grado 0 che sia la migliore approssimazione di $f(x)$ vicino a x_0. Questa condizione potremmo scriverla così:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - p_0(x) = 0$$

In pratica quello che stiamo chiedendo è che quando ci avviciniamo al punto x_0 la differenza tra la funzione $f(x)$ e la sua approssimazione $p_0(x)$ tenda a 0 (che è un altro modo di dire che le due quantità diventano uguali). In questo caso il nostro polinomio di approssimazione è di grado 0, questo implica che equivale ad una costante generica $k \in \mathbb{R}$. Sostituendo la funzione $f(x) = e^x$, $p_0(x) = k$ e il punto $x_0 = 0$ il nostro limite risulta:

$$\lim_{x \to 0} e^x - k = 0$$

Se ora proviamo a risolverlo ci viene fuori un equazione che si può risolvere per k, che è il nostro polinomio di approssimazione che vogliamo trovare:

$$\lim_{x \to 0} e^x - k = 0 \implies e^0 - k = 0 \implies k = e^0 = 1$$

Di conseguenza la migliore approssimazione di grado 0 della funzione $f(x) = e^x$ è il polinomio $p_0(x) = 1$:

$$e^x \approx 1 \qquad \text{per } x \to 0$$

Ovviamente però non è una gran approssimazione, quindi proviamo ad trovare l'approssimazione migliore sotto forma di polinomio di grado 1.

Vogliamo trovare il miglior polinomio di **grado 1** che approssima la funzione $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$. In questo caso se usiamo il limite usato in precedenza non riusciamo a ricavare nessuna informazione aggiuntiva sul polinomio. Questo perché:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} f(x) - p_1(x) = 0 \\
&\lim_{x \to x_0} e^x - (ax + b) = 0 \\
&e^0 - (a \cdot 0 + b) = 0 \\
&1 - b = 0 \implies b = 1
\end{aligned}$$

Infatti la costante b è la nostra costante k vista in precedenza. Visto che abbiamo già imposto il limite nel punto e quest'ultimo non ci dà alcuna informazione aggiuntiva se aumentiamo il grado del polinomio, dobbiamo trovare un altro metodo per approssimare una funzione. Come abbiamo già visto, il limite nel punto ci dà la migliore approssimazione per il punto specifico, ma non ci dice nulla se ci allontaniamo leggermente da esso. Quello che vogliamo però è che se ci allontaniamo "un pochino" dal punto, il valore della funzione e il valore della nostra approssimazione siano abbastanza simili. Potremmo quindi pensare di imporre che se ci allontaniamo dal punto, il *tasso di cambiamento della funzione sia lo stesso della nostra approssimazione*. In questo modo partendo dal punto stesso, quando ci allontaniamo il valore della funzione e della nostra approssimazione cambiano nello stesso modo. Per fare un esempio visuale prendiamo il grafico di $f(x) = e^x$ (Figura: 32). Nel grafico sono presenti anche delle rette (che sono dei polinomi di grado 1) che passano tutte per il punto $P(0, 1)$ che è la nostra prima approssimazione. Il fatto è che queste rette hanno coefficienti angolari diversi.

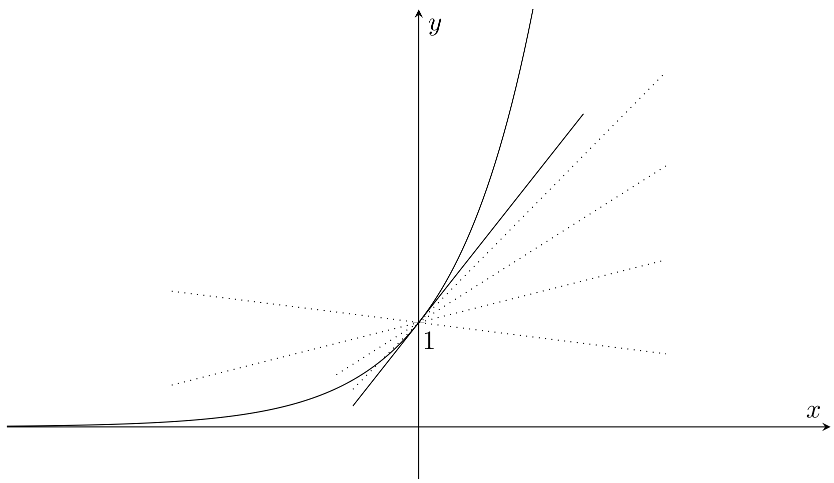


Figure 32: Grafico di $y = e^x$ con alcune rette che tentano una sua approssimazione

Ad occhio è facile vedere che la retta che sembra approssimare di più la funzione è quella non tratteggiata. Ma come la formalizziamo un po' di più questa cosa?

Ovviamente quando si parla di *tasso di cambiamento* la lampadina che si deve accendere è quella della derivata, che infatti misura il tasso di cambiamento di una funzione in un determinato punto. Se quindi facciamo in modo che la funzione che vogliamo approssimare abbia la stessa derivata del nostro polinomio di approssimazione:

$$f'(x_0) = p_1'(x_0)$$

È importante che la derivata sia calcolata in x_0 in quanto vogliamo sempre approssimare la funzione per un punto, in questo caso $x_0 = 0$. Ora se calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \qquad\qquad p_1'(x) = (ax + b)' = a$$

Sostituendo quindi il punto:

$$\begin{gathered} f'(x_0) = p_1'(x_0) \\ e^0 = a \\ a = 1 \end{gathered}$$

In questo caso abbiamo trovato che il nostro polinomio di approssimazione $p_1(x) = ax + 1$, per approssimare al meglio la funzione e il suo *tasso di cambiamento* deve avere il coefficiente $a = 1$. È importante però notare che del termine noto b non sappiamo effettivamente nulla perché la derivata si "cancella". Se proviamo ad applicare la condizione vista in precedenza per trovare il polinomio di grado 0 che meglio approssima la funzione:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} f(x) - p_1(x) = 0 \\
&\lim_{x \to x_0} e^x - (ax + b) = 0 \\
&e^0 - (a \cdot 0 + b) = 0 \\
&1 - b = 0 \implies b = 1
\end{aligned}$$

Come prima che a causa della derivata il termine noto spariva e quindi era completamente ininfluente sul tasso di cambiamento della funzione e del nostro polinomio, ora per il limite spariscono tutti i termini con una x, lasciando solo il termine noto. Questo è molto importante perché anche avendo un polinomio di approssimazione di grado 100 il termine noto sarà sempre lo stesso, in questo caso 1.

Ora che però abbiamo già usato sia un limite che una derivata cosa ci inventiamo per trovare il miglior polinomio di **grado 2** che approssima la funzione? In realtà ora possiamo continuare ad iterare lo stesso processo della derivata, semplicemente usando derivate seconde, terze, ecc. Questo perché la derivata in quanto tale rappresenta il tasso di cambiamento della funzione di partenza, quindi se facciamo in modo che le due derivate seconde coincidano abbiamo aggiunto un grado di somiglianza tra il nostro polinomio e la funzione:

$$f''(x_0) = p_2''(x_0)$$

In questo caso:

$$f''(x) = (e^x)'' = e^x \qquad\qquad p_2''(x) = (ax^2 + bx + c)'' = 2a$$

E quindi:

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &= p_2''(x_0) \\
e^0 &= 2a \\
a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Come ormai è facile notare, sui polinomi, la derivata n-esima lascia solo i termini con grado maggiore di n. Di conseguenza quelli prima sono completamente indipendenti e questo significa che se approssimiamo una funzione con un polinomio di grado 1 e poi vogliamo trovare il polinomio di grado 2 che approssima meglio tale funzione, quest'ultimo sarà fatto dal primo polinomio più il grado che lo distingue. Cioè in questo caso avevamo già il polinomio di grado 1:

$$p_1(x) = x + 1$$

Per trovare il polinomio grado 2 partiamo da questo e semplicemente aggiungiamo un termine:

$$p_2(x) = ax^2 + p_1(x)$$

E in questo caso abbiamo trovato che $a = \frac{1}{2}$, quindi il polinomio di secondo grado che approssima al meglio la funzione $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ è:

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

Sull'esponenziale è facile iterare il processo in quanto la derivata sarà sempre e^x che in $x = 0$ vale 1. Di conseguenza la derivata terza per approssimare un polinomio di grado 3 sarà:

$$\begin{gathered}
p_3'''(x) = e^0 \\
(a^3x + \frac{1}{2}x^2 + x + 1)''' = 1 \\
3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a = 1 \\
a = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3!}
\end{gathered}$$

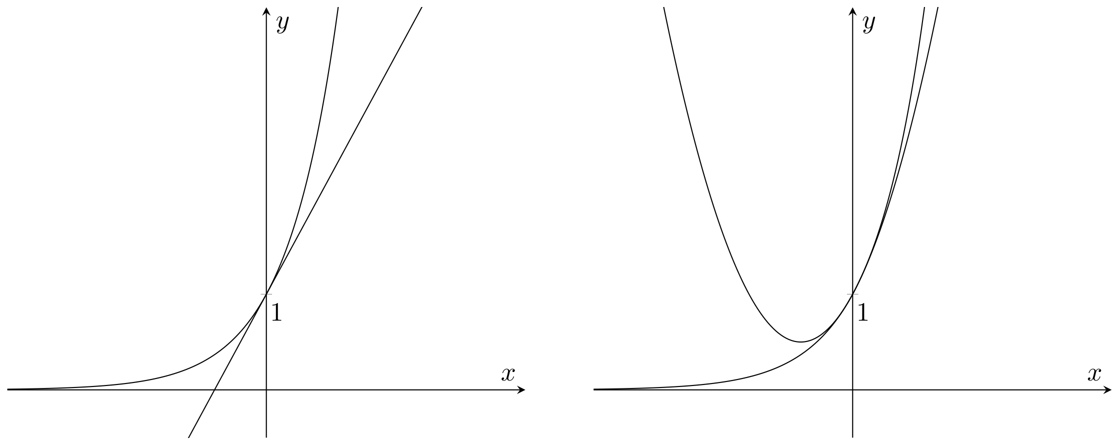


Figure 33: Approssimazioni di grado 1 e 2 della funzione $f(x) = e^x$

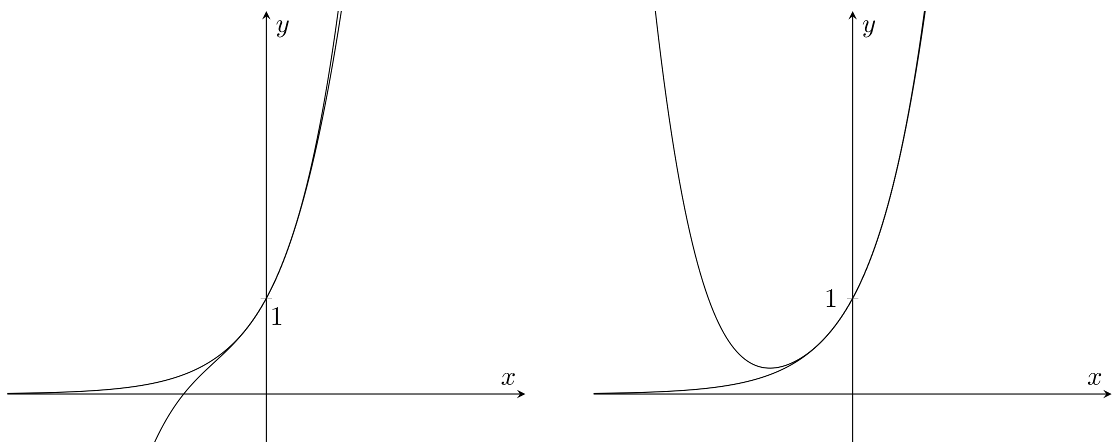


Figure 34: Approssimazioni di grado 3 e 4 della funzione $f(x) = e^x$

Si comincia a vedere un pattern: infatti il coefficiente angolare del termine di grado n sarà sempre $\frac{1}{n!}$ proprio perché dovendo derivare n volte l'esponente di grado n scende e forma un fattoriale. In questo caso la funzione $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ è approssimata dal polinomio:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \cdots \frac{1}{n!}x^n$$

Ovviamente più avanti verrà definito tutto più formalmente, però questa è effettivamente il polinomio di Taylor per $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$. La cosa più bella però è vedere i grafici che piano piano si avvicinano sempre di più alla funzione (Figure: 33 e 34)

8.3.2 Definizione formale

Prendiamo una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ con $0 \in]a, b[$. Se f è continua in 0:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Cioè:

$$\lim_{x \to 0} (f(x) - f(0)) = 0$$

Ne consegue che $f(x) - f(0)$ è un infinitesimo per $x \to 0$:

$$f(x) - f(0) = o(1) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = f(0) + o(1) \quad \text{per } x \to 0$$

Se provassimo a sostituire a $f(0)$ una qualunque costante $k \neq f(0)$:

$$\lim_{x \to 0}(f(x) - k) = f(0) - k \neq 0$$

Ne consegue che $f(x) - k$ non è un infinitesimo, cioè:

$$f(x) = k + \underbrace{(f(x) - k)}_{\text{non è un infinitesimo}}$$

Quindi $f(0)$ è la migliore costante che approssima $f(x)$ per $x \sim 0$.

Se f è derivabile in $x = 0$ allora:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x}{x} = 0$$

Pertanto:

$$f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x = o(x)$$

Se quindi arrangiamo i termini in modo leggermente differente:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

In questo caso il polinomio $f(0) + f'(0) \cdot x$ è la migliore approssimazione di grado 1 di f in $x = 0$ perché l'errore tende a zero più velocemente di x.

La notazione ***o*-piccolo infatti rappresenta l'errore** che ha la nostra approssimazione. Questo perché un $o(x)$ racchiude tutti i termini che vanno a 0 più velocemente di x, quindi tutti i gradi superiori in quanto polinomio. Infatti un errore $o(x^4)$ racchiude tutti i gradi superiori a x^4.

Ovviamente come in fisica, la misura è *tanto più buona quanto l'errore è piccolo*. È quindi necessario sempre scegliere il grado di approssimazione in base all'evenienza.

Ora scegliamo il polinomio di grado 2 che approssima meglio la funzione. Ovviamente dobbiamo contare l'errore, che chiameremo $E_2(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + a_2 \cdot x^2 + E_2(x)$$

Dobbiamo scegliere $a_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'errore tenda a zero più velocemente di x^2, cioè:

$$E_2(x) = o(x^2)$$

Sostituendo:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + a_2 \cdot x^2 + o(x^2)$$

Portando quindi tutti i termini a sinistra:

$$f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - a_2 \cdot x^2 = o(x^2)$$

Applicando la definizione di o-piccolo ci riduciamo a dover trovare a_2 dal seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - a_2 \cdot x^2}{x^2} = 0$$

A tal fine usiamo il teorema di De L'Hôpital (Sezione: 7.8.6) assumendo che la funzione sia derivabile due volte in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - a_2 \cdot x^2}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - 2! \cdot a_2 \cdot x}{2! \cdot x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{f'(x) - f'(0)}{2! \cdot x} - a_2 \right) = \frac{1}{2!} \left(\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \right) - a_2 = \frac{1}{2!} f''(0) - a_2$$

Ricordandoci che vogliamo che il risultato del limite sia 0:

$$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot f''(0)$$

Quindi la migliore approssimazione di grado 2 di f in $x = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + o(x^2)$$

Per trovare la migliore approssimazione di grado 3 basta iterare il processo. Quindi vogliamo trovare a_3:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + o(x^3)$$

Che portando tutto a sinistra e applicando la definizione di o-piccolo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3}{x^3} = 0$$

Assumendo che la funzione sia derivabile 3 volte applichiamo De L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0) \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2}{3 \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0) + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x}{3 \cdot 2 \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{3! \cdot x} - a_3 = \frac{1}{3!} \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} - a_3 =$$

$$= \frac{1}{3!} f'''(0) - a_3$$

Imponendo che sia uguale a 0 come prima:

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0)$$

Quindi la migliore approssimazione di grado 3 di f in $x = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3 + o(x^3)$$

Si comincia a vedere un pattern, infatti:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3 + o(x^3) = \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i \right) + o(x^3)$$

Se la funzione è derivabile 4 volte:

$$a_4 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)$$

E quindi:

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i \right) + o(x^4)$$

Si dimostra così il teorema di Peano.

8.3.3 Teorema di Peano in $x = 0$

Teorema

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ con $0 \in]a, b[$, se f è derivabile n-volte in $x_0 = 0$ si definisce **polinomio di Taylor** di f in $x_0 = 0$ di grado $\leqslant n$:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i$$

È l'unico polinomio di grado $\leqslant n$ tale che[a]:

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

[a] In questo caso non si sa con certezza se il polinomio sarà esattamente di grado n, per quello si mette il $\leqslant$. Questo perché alcune derivate di ordine superiore potrebbero essere nulle facendo quindi risultare il polinomio di grado minore. Si noti però che se comunque il polinomio non risultasse di grado n, sarebbe comunque la migliore approssimazione di grado n e avrebbe un o-piccolo di $o(x^n)$. Un classico esempio in questo caso sono le funzioni seno e coseno.

8.3.4 Teorema di Peano generale

Teorema

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ con $x_0 \in]a, b[$, se f è derivabile n-volte in x_0 si definisce **polinomio di Taylor** di f in x_0 di grado $\leqslant n$:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i$$

È l'unico polinomio di grado $\leqslant n$ tale che:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

È importante notare che il polinomio ci garantisce una buona approssimazione **solo vicino al punto $\mathbf{x_0}$**. È possibile che la funzione si approssimi anche lontano da quel punto, ma nessuno lo garantisce.

8.4 Sviluppi di Taylor per le funzioni elementari in $x_0 = 0$

Prima di dare tutti gli sviluppi delle funzioni elementari già calcolati è carino vedere come si utilizza effettivamente nella pratica il teorema di Peano. Nella sottosezione successiva sono comunque riportati tutti gli sviluppi delle funzioni elementari.

Esponenziale: Vogliamo calcolare lo sviluppo di Taylor per la funzione $f(x) = e^x$. Ricordiamoci che $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$, cioè è derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$. Dal teorema di Peano:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i$$

La cosa bella di e^x è che la derivata è uguale alla funzione, di conseguenza tutte le derivate saranno sempre uguali e quindi $f^{(n)}(0) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Ne consegue che:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

E quindi:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot x^i + o(x^n)$$

Seno: Calcoliamo lo sviluppo di Taylor per la funzione $f(x) = \sin x$, ricordandoci che $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$. Proviamo prima di usare il teorema di Peano a calcolare le derivate in $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= (\sin x)|_{x=0} = \sin x|_{x=0} = \sin 0 && = 0 \\
f'(0) &= (\sin x)'|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 && = 1 \\
f''(0) &= (\sin x)''|_{x=0} = -\sin x|_{x=0} = -\sin 0 && = 0 \\
f'''(0) &= (\sin x)'''|_{x=0} = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 && = -1 \\
f^{(4)}(0) &= (\sin x)^{(4)}|_{x=0} = \sin x|_{x=0} = \sin 0 && = 0 \\
f^{(5)}(0) &= (\sin x)^{(5)}|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 && = 1 \\
f^{(6)}(0) &= (\sin x)^{(6)}|_{x=0} = -\sin x|_{x=0} = -\sin 0 && = 0 \\
f^{(7)}(0) &= (\sin x)^{(7)}|_{x=0} = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 && = -1 \\
f^{(8)}(0) &= (\sin x)^{(8)}|_{x=0} = \sin x|_{x=0} = \sin 0 && = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

È facile vedere che i valori si ripetono uguali ogni 4. Sostituendo quindi al teorema di Peano:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = 0 + x \cdot 1 + \frac{1}{2!}x^2 \cdot 0 + \frac{1}{3!}x^3 \cdot -1 + \frac{1}{4!}x^4 \cdot 0 + \frac{1}{5!}x^5 \cdot 1 + \cdots$$

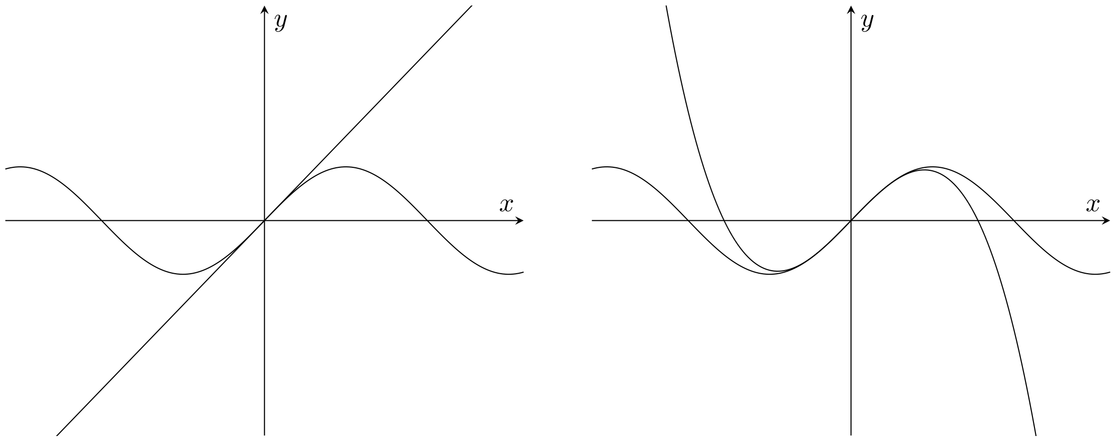


Figure 35: Approssimazioni di grado 1 e 3 della funzione $f(x) = \sin x$

Che quindi diventa:

$$T_n(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

Dunque:

$$\sin x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + o(x^{2n+1})$$

Una osservazione importante da fare è che nello sviluppo di $\sin x$ compaiono solo **termini dispari**. Questo perché la funzione è una funzione dispari.

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Questo è estremamente utile in quanto tutti i termini pari della successione sono nulli, e questo implica che ogni termine dispari di grado $2n+1$ non è solo la migliore approssimazione per $\sin x$ di grado $2n+1$, ma è anche la migliore approssimazione di grado $2n+2$. Questo implica che:

$$\begin{aligned}
\sin x = x + o(x) \quad &\implies \quad \sin x = x + o(x^2) \\
\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \quad &\implies \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \\
\sin x = x + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad &\implies \quad \sin x = x + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Possiamo quindi usare questo piccola osservazione a nostro vantaggio quando sviluppiamo il seno.

Coseno: Lo sviluppo della funzione $f(x) = \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$ è molto simile al seno in quanto anche

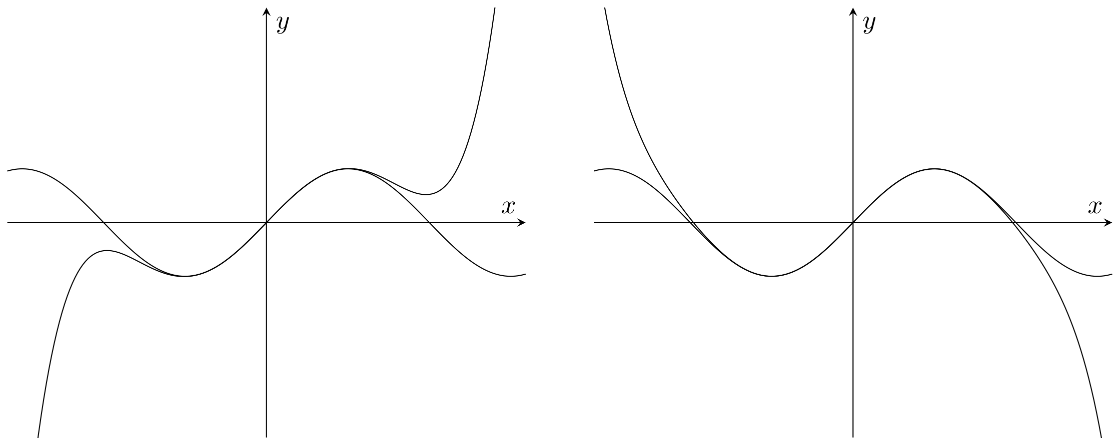


Figure 36: Approssimazioni di grado 5 e 7 della funzione $f(x) = \sin x$

in questa i valori della derivata si alternano ogni 4:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(0) &= (\cos x)|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 && = 1 \\
f^{(1)}(0) &= (\cos x)^{(1)}|_{x=0} = -\sin x|_{x=0} = -\sin 0 && = 0 \\
f^{(2)}(0) &= (\cos x)^{(2)}|_{x=0} = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 && = -1 \\
f^{(3)}(0) &= (\cos x)^{(3)}|_{x=0} = \sin x|_{x=0} = \sin 0 && = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Quindi per il teorema di Peano:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = 1 + x \cdot 0 + \frac{1}{2!}x^2 \cdot -1 + \frac{1}{3!}x^3 \cdot 0 + \frac{1}{4!}x^4 \cdot 1 + \frac{1}{5!}x^5 \cdot 0 + \cdots$$

Che quindi diventa:

$$T_n(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Dunque:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^{2n})$$

Come per la funzione seno in cui comparivano solo termini di grado dispari, nella funzione coseno compaio solo **termini di grado pari**. Questo perché la funzione è una funzione pari.

$$\cos(-x) = \cos x$$

Come per il seno possiamo usare questa considerazione per diminuire l'errore tenendo la stessa approssimazione. Se infatti abbiamo un approssimazione di grado $2n$, risulta anche la migliore approssimazione di grado $2n+1$ in quanto dovremmo aggiungere un termine dispari e quindi moltiplicato per uno 0, risultando quindi in un termine non presente:

$$\cos x = 1 + o(1) \qquad \Longrightarrow \qquad \sin x = 1 + o(x)$$

$$\sin x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \sin x = x - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$$

$$\sin x = x + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) \qquad \Longrightarrow \qquad \sin x = x + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

Logaritmo naturale: Se uno prova a cercare il polinomi di Taylor di $f(x) = \ln(x)$ in $x = 0$ si accorge che in quel punto il logaritmo non è definito. Questo implica che dobbiamo trovare un altro punto, oppure cambiare la funzione da approssimare. Di solito si tende a cambiare la funzione per comodità e invece di calcolare il polinomio di Taylor per $\ln(x)$ lo si calcola per $\ln(1 + x)$.

La scelta di sviluppare la funzione in $1 + x$ invece di qualsiasi altro punto (cioè perché non $2 + x$?) è per comodità. Se infatti volessimo svilupparla in un punto $x_0 > 0$:

$$\ln x = \ln(x_0 + (x - x_0)) = \ln\left(x_0 \cdot \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)\right) = \ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{x_0}(x - x_0)\right)$$

Osserviamo che $\ln x_0$ è una costante, mentre se facciamo un cambio di variabile:

$$t := \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

$$\text{se } x \to x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad t \to 0$$

Quindi indipendentemente dal punto in cui vogliamo sviluppare il logaritmo possiamo sempre ridurci ad uno sviluppo di $\ln(1 + t)$ in $t = 0$.

Cominciamo quindi con il calcolare le derivate di $f(x) = \ln(1 + x)$ in $x = 0$:

$$f^{(0)}(0) = (\ln(1+x))|_{x=0} = \ln(1+x)|_{x=0} = \ln 1 \qquad = 0$$

$$f^{(1)}(0) = (\ln(1+x))^{(1)}|_{x=0} = (1+x)^{-1}|_{x=0} = 1^{-1} \qquad = 1$$

$$f^{(2)}(0) = (\ln(1+x))^{(2)}|_{x=0} = -1 \cdot (1+x)^{-2}|_{x=0} = -1(1)^{-2} \qquad = -1$$

$$f^{(3)}(0) = (\ln(1+x))^{(3)}|_{x=0} = -1 \cdot -2 \cdot (1+x)^{-3}|_{x=0} = 2! \cdot (1)^{-}3 \qquad = 2!$$

$$f^{(4)}(0) = (\ln(1+x))^{(4)}|_{x=0} = -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot (1+x)^{-4}|_{x=0} = -3! \cdot (1)^{-}4 \qquad = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = (\ln(1+x))^{(n)}|_{x=0} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}|_{x=0} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

L'unico caso in cui la "formula generale" per la derivata non funzione è il primo, cioè quando non bisogna derivare ma semplicemente calcolare la funzione nel punto. Applicando quanto visto e il teorema di Peano:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + o(x^n) = \ln(1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + o(x^n) =$$

$$= \ln(1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} \cdot (i-1)!}{i!} \cdot x^i + o(x^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \cdot x^i + o(x^n) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

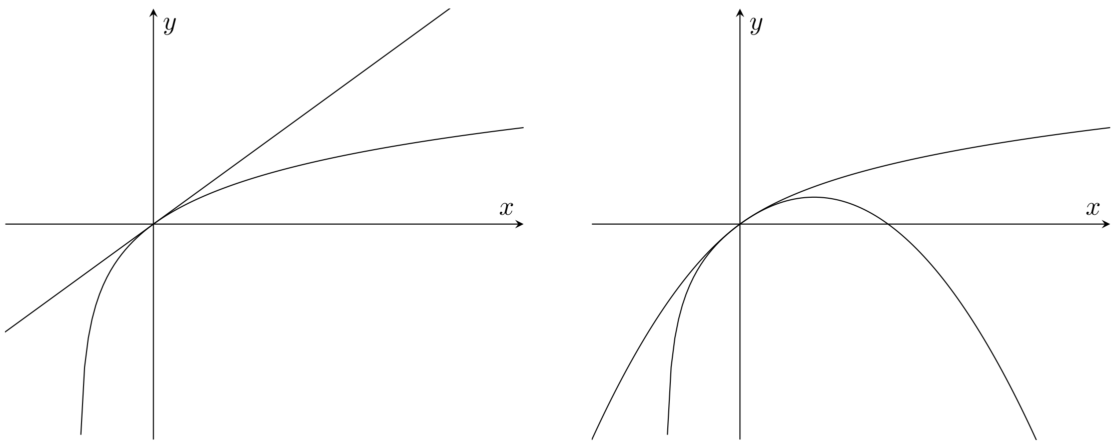


Figure 37: Approssimazioni di grado 1 e 2 della funzione $f(x) = \ln(1+x)$

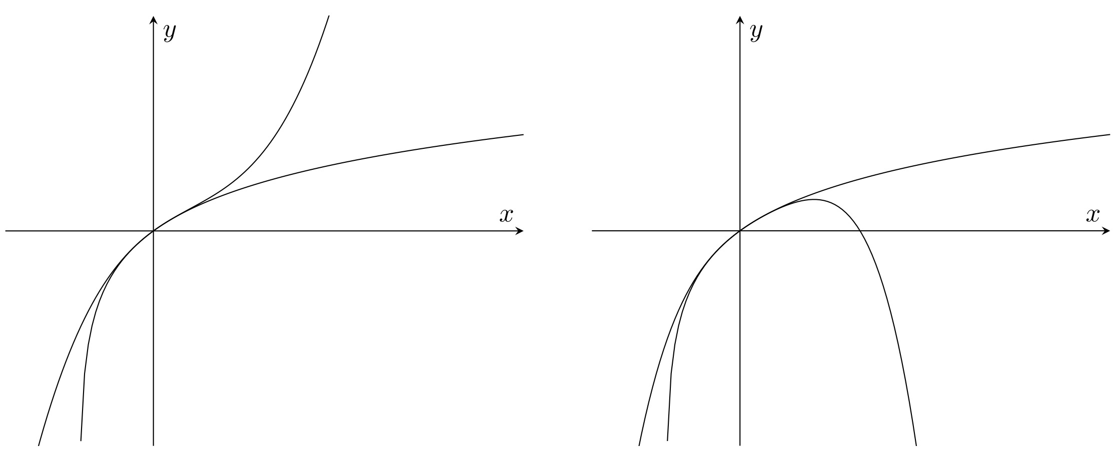


Figure 38: Approssimazioni di grado 3 e 4 della funzione $f(x) = \ln(1+x)$

8.4.1 Tavola riassuntiva

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

Quando $\alpha \in \mathbb{R}$ bisogna utilizzare il coefficiente binomiale generalizzato (Sezione: 3.9.1) definito come segue:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$