

# 1 Derivate parziale

**Def:**  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$

Poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + h) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$$

Se i due limiti esistono (finiti), diciamo che  $f$  è derivabile parzialmente in  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Poniamo

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}), \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}))$$

gradiente di  $f$

Più in generale, se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in A$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $e_1, \dots, e_n$  basi canoniche in  $\mathbb{R}^n$

Poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + he_j) - f(\bar{x})}{h}$$

(anche  $\partial_j f(\bar{x})$ ). Derivate parziali rispetto  $x_j$

# 2 Derivabilità e continuità

Ci chiediamo se l'esistenza della derivate parziali implicino la continuità. La risposta è negativa grazie al seguente esempio

$$\text{ES } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1.  $\exists \partial_x f(0, 0), \partial_y f(0, 0)$
2.  $f$  è discontinua in  $(0, 0)$

**verifica di 1**

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Analogamente  $\partial_x f(0, 0) = 0$

**Verifica di 2** Usiamo la definizione "per successioni": troviamo, scegliendo  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} * \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque  $f$  non è continua in  $(0, 0)$

### 3 Differenziabilità

Ricordiamo che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $\bar{x}$  con derivata  $f'(\bar{x})$  se e solo se

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h)$$

dove il resto  $o(h)$  soddisfa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{o(h)}{h} \right| = 0$$

equivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \varepsilon \quad \forall h \in ]-\delta, \delta[$$

#### 3.1 Definizione di "o piccolo" in $\mathbb{R}^2$

**Def** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto contenente  $(0, 0)$

Sia  $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $p \geq 0$ .

Si scrive  $g(h, k) = o(\|(h, k)\|)$  per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \varepsilon \quad \forall (h, k) \in A \cap B((0, 0), \delta)$$

**Esempi:**

$$g(h, k) = hk = o(\|(h, k)\|) \quad \text{per } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

$$g(h, k) = \sqrt{|h|^{1/2}} = o(\|(h, k)\|) = o(1)$$

$$g(h, k) = h^2k + k^3 = o(\|(h, k)\|^2) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

#### 3.2 Def. funzione differenziabile

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ . ( $A$  aperto) Si dice che  $f$  è differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y})$  se

- $\exists \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}), \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$

- $\forall (h, k) \text{ t.c. } (\bar{x}, \bar{y}) + (h, k) \in A$  vale lo sviluppo:

$$f((\bar{x}, \bar{y}) + (h, k)) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \quad \text{per } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

**Osservazione:**  $f$  differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A \implies f$  continua in  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Basta osservare che  $\forall (h_n, k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$  risulta

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + (h_n, k_n) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h_n, k_n) \rangle + o(\|(h_n, k_n)\|)$$

Nelle coordinate  $(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = (x, y) \in A$  si scrive:

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle + o(\|(x - \bar{x}, y - \bar{y})\|) \quad (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$$

Da questa formula emerge

$$T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle$$

$T_1$  = Polinomio di Taylor del primo ordine con punto iniziale  $(\bar{x}, \bar{y})$

Infine  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = T_1(x, y)\}$  è il piano tangente al grafico di  $f$  in  $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ .

### 3.3 Teorema della differenziabilità

Se  $f$  è  $C^1$  su  $A \in \mathbb{R}^2$ ,  $A$  aperto, allora  $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in A$   $f$  è differenziabile.

#### 3.3.1 Lemma preliminare

Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è  $C^1$  sull'aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in A$ ,  $\forall h, k \in \mathbb{R}$

Tali che  $(\bar{x} + h, \bar{y})$ ,  $(\bar{x}, \bar{y} + k) \in A$ , esistono  $\theta_1, \theta_2 \in ]0, 1[$  tali che

$$f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_x f(\bar{x} + \theta_1 h, \bar{y}) \quad e$$

$$f(\bar{x}, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \theta_2 k)$$

**Dim di 1** Per semplicità  $A = \mathbb{R}^2$ .

Considero la funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = f(t, \bar{y})$

Si verifica che  $g$  è derivabile e vale

$$g'(t) = \partial_x f(t, \bar{y}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora uso Lagrange sull'intervallo di estremi  $\bar{x}$  e  $\bar{x} + h$  per la funzione  $g$ .  $\implies$   
 $\exists \theta_1 \in ]0, 1[$  tale che  $g(\bar{x} + h) - g(\bar{x}) = g'(\bar{x} + \theta_1 h)h$  Trascrivendo in termini di  $f$ , si trova

$$f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_x f(\bar{x} + \theta_1 h, \bar{y})h$$

**Dim 2** è analoga

#### 3.3.2 Dimostrazione del teorema sulla differenziabilità

Per semplicità  $A = \mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  classe  $C^1$  e  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ . Per  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  vale

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = [f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y})] + [f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})] := (1) + (2)$$

Grazie al lemma precedente  $\exists \theta_1, \theta_2 \in ]0, 1[$  tali che

$$1. = \partial_y f(\bar{x} + h, \bar{y} + \theta_1 k)k$$

$$2. = \partial_x f(\bar{x} + \theta_2 h, \bar{y})h$$

Per concludere, basta mostrare che per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

$$1. = \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k + o(|(h, k)|)$$

$$2. = \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h + o(|(h, k)|)$$

In altri termini basta vedere che (qualizziamo (2), ad esempio)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tali che

$$\frac{|\partial_x f(u, v) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})|}{|(h, k)|} < \varepsilon \quad \forall (h, k) \neq (0, 0) \quad |(h, k)| < \delta$$

Siccome  $\partial_x f$  è continua,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tali che

$$|\partial_x f(u, v) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon \quad \forall (u, v) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$$

Con questa scelta di  $\delta$ , usando  $\left| \frac{h}{|(h, k)|} \right| \leq 1$ , abbiamo

$$|\partial_x f(\bar{x} + \theta_2 h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon$$

perchè  $(\bar{x} + \theta_2 h, \bar{y}) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \delta) \quad \forall \theta_2 \in ]0, 1[$ ,  $\forall (h, k) \in B((0, 0), \delta)$

L'analisi del termine (1) si svolge in modo analogo