1 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

1.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: Sia $h : I \to J$ derivabile e $f : J \to \mathbb{R}$ continua $(I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti. Definiamo $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t)dt$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t)dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.
Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I_c'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

2 Formula per il cambio variabile

Teorema: I, J intervalli aperti, $h : I \to J$ con derivata h' continua su I
$f : J \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Dimostrazione: siano $F : I \to \mathbb{R}, G : I \to R, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx, G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt$
Le funzioni integrande sono continue, h' è continua. Dunque F e G sono derivabili in I.
Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$
Dunque $F - G$ è costante su I.
Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

3 Integrali generalizzati

Definizione $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua.
Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La definizione per $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

Definizione: $f\ :]a,b] \to \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a,b]$ se

$$\exists \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$