1 Forme Quadratiche

1.1 Definizione

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A = A^T$ considero $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $q_A(h) = \langle Ah, h\rangle$
$\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ h \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ Ah \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
q_A è la forma quadratica associata alla matrice quadrata e simmetrica A
quadrata: matrice che ha lo stesso numero di righe e colonne
simmetrica: matrice che è uguale alla sua trasposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = A^T$$

$$q_A = \langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \rangle = \langle \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \rangle = ah_1^2 + 2b\, h_1\, h_2 + ch_2^2$$

Caso con n generico:

$$q_A = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} h_k h_j = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} a_{jk} h_j h_k$$

Osservazione informale: Abbiamo trovato un polinomio di grado 2, quindi possiamo dire che le forme quadratiche sono delle funzioni associate a delle matrici che rappresentano polinomi

1.2 Segno di una forma quadratica

Definizione: $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Si dice che A è definita positiva se vale $\langle Ah, h\rangle > 0\ \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
2. Si dice che A è definita negativa se vale $\langle Ah, h\rangle < 0\ \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
3. Si dice che A è indefinita se $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n$ t.c.
   $\langle Ah^-, h^-\rangle \lneqq 0 \lneqq \langle Ah^+, h^+\rangle$

Osservazione informale: La matrice A è positiva se per ogni vettore h è positiva, stessa cosa vale per il negativo. Invece si dice indefinita se per alcuni vettori h è negativa e per altri è positiva, quindi non possiamo assegnarli un segno preciso.

Osservazione informale: I segni di disuguaglianza devono essere stretti ($<, >$), altrimenti si dice che A è semidefinita positiva.

Forme quadratiche non singolari:

1. $A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \qquad \textit{determinante positivo} \end{cases}$

2. $A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ ac - b^2 > 0 \qquad \textit{determinante positivo} \end{cases}$

3. A è indefinita $\Leftrightarrow ac - b^2 < 0$ *determinante negativo*

   Forme quadratiche singolari:

4. se $ac - b^2 = 0$, quindi *determinante nullo*, si tratta di una matrice singolare, quindi A è semidefinita

1.3 Proposizione

Se $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definita positiva, allora $\exists m > 0$ t.c.

$$\langle Ah, h \rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Allo stesso modo se A è definita negativa, allora $\exists m > 0$ t.c.

$$\langle Ah, h \rangle \leq m\,|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione: (n=2) Scriviamo $h = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ con $r \geq 0, r = |h|$ e $\theta \in [0, 2\pi]$
Allora vale $\langle Ah, h \rangle = a_{11}\, r^2 \cos^2\theta \ + \ 2a_{12}\, r^2 \cos\theta \sin\theta \ + \ a_{22}\, r^2 \sin^2\theta = r^2[a_{11} \cos^2\theta \ + \ 2a_{12} \cos\theta \sin\theta \ + \ a_{22} \sin^2\theta]$
Poniamo $g(\theta) = [\dots]$ per $\theta \in [0, 2\pi]$
Per ipotesi $g(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$ (infatti $r^2 g(\theta) > 0 \quad \forall r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$)
Essendo f continua su $[0, 2\pi]$ per il teorema di Weistrass $\exists\overline{\theta} \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\overline{\theta}) = min\ g$.
Tale minimo è positivo e lo chiamiamo m. Dunque $\langle Ah, h \rangle = r^2 g(\theta) \geq r^2 m = m|h|^2 \quad \forall h$

2 Formula di Taylor di ordine 2

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$, f è di classe C^2
Allora vale $\forall \overline{x} \in A$ vale lo sviluppo

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \bigtriangledown f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \quad \text{per } h \to 0$$

Dimostrazione: Dimostriamo la seguente formula con resto "non uniforme"

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1, \forall x \in A$$

vale la formula

$$f(\overline{x}+tv) = f(\overline{x}) + \langle \bigtriangledown f(\overline{x}), tv\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})tv, tv\rangle + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Consideriamo la funzione $g:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\overline{x}+tv)$ definita per ε sufficientemente piccolo.
Poichè f è di classe C^2, si vede che $\exists g'(t) = \langle \bigtriangledown f(\overline{x}+tv), v\rangle \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ inoltre esiste ed è continua $g''(t) = \langle Hf(\overline{x}+tv)v, v\rangle$

Scriviamo la Taylor in t per g con punto iniziale t = 0. Otteniamo:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Trascrivendo in termini di f si trova esattamente la formula 1 da dimostrare.

3 Teorema di classificazione dei punti critici

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è C^2 sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, vale quanto segue, per $\overline{x} \in A$

1. $\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{x}$ è punto di minimo locale

2. $\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{x}$ è punto di massimo locale

3. $\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) \text{ indefinita} \end{cases} \Longrightarrow \overline{x}$ è punto di sella

Nota: $\overline{x}$ punto critico di f si dice di sella se $\forall r > 0 \ \exists x_+ ,\ x_- \in B(\overline{x}, r)$ tale che $f(x_-) < f(\overline{x}) < f(x_+)$

Dimostrazione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2.
Sia $\overline{x} \in A$ un punto critico con $Hf(\overline{x}) > 0$.
Dobbiamo dimostrare che $\exists \delta > 0$ tale che:

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Usiamo la formuala di Taylor.

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \langle \bigtriangledown f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \quad \text{per } h \to 0$$

visto che $\bigtriangledown f(\overline{x}) = 0$, analizziamo $\frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o\left(|h|^2\right) \geq 0$
Per il teorema sulle forme positive $\exists m > 0$ tale che

$$\langle Hf(x)h, h\rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$$

Usando la definizione di o-piccolo con $\varepsilon = \frac{m}{4}$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Dunque, per $|h| < \delta$ vale

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) &\geq |h|^2 \left(\frac{1}{2}m + \frac{o\left(|h|^2\right)}{|h|^2}\right) \geq \\ &\geq |h|^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4}\right) = \frac{m}{4}|h|^2 \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \end{aligned}$$

Il teorema è dimostrato. I casi di punto di massimo o sella sono analoghi.

3.1 Condizioni necessarie affinchè $\overline{x}$ sia di minimo

Siamo nel secondo ordine. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, f è C^2 su A e $\overline{x}$ è di minimo, allora:

$$\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ \langle Hf(\overline{x})h, h\rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si dice in tal caso che $Hf(\overline{x})$ è semidefinita positiva