1 Somma di Reimann

Dato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, fissato n $\in \mathbb{N}$
poniamo $h = \frac{b-a}{n}$ e
$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots,\ x_n = a + nh$
$\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ fissiamo $\xi_k \in [x_k - 1, x_k]$
Sia f continua su $[a, b]$. Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)h = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

S_n = somma di Riemann n-esima

Nota S_n dipende dalla scelta di $\xi_1, \ldots, \xi_n$, che è arbitraria

Osservazione $a = b \Rightarrow S_n = 0 \forall n$

Osservazione $\forall x \in [a, b].\ f(x) = c \Rightarrow S_n = c(b - a)$ Dunque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è costante , in questi casi

1.1 Teorema

f continuia in $[a, b]$. Allora $\exists \lim S_n\ finito$ t.c limite ** dipende dalla $n \to +\infty$ sulla retta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fatta nella costurzuone sopra
Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

e si dice che f è integrabile

Osservazione dalle precedenti osservazioni si deduce
$\int_a^a f(x)dx = 0$ e
$\int_a^b cdx = c(b - a)$

Osservazione Esistono funzioni discontinue per cui $\nexists \lim_{n \to \infty} S_n$ oppure dipende dalla scelta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fatta ad ogni passo

Osservazione Se f ha un numero finito di punti di discontinuità (con salto finito) allora f è integrabile.

2 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità:** f,g continue su $[a, b],\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   Allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g] = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} integrabile$
   Allora $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ vale$
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. **Monotomia:** f,g continue su $[a, b]$
$$\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad con\ a < b$$
4. **Convenzione:**
$$\forall a, b \int_a^b f = -\int_b^a f$$

3 Teorema della media integrale

f continua su $[a, b]$, allora $\exists c \in [a, b]\ t.c$
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dimostazione: Siano x_0 e x_1 punti di minimo e massimo assoluti (Wiestrass). Allora
$$\forall x \in [a, b]. f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x_0)dx}_{f(x_0)(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x_1)dx}_{f(x_1)(b-a)}$$
Divido per $b - a$ e trovo
$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)$$
Per il teorema dei valori intermedi applicato a f,
$$\exists c \in [a, b]\ t.c\ f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)$$

4 La primitiva di una funzione

4.1 Definizione

$f :]a, b[\to \mathbb{R}$. $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ si dice primidiva di f su $]a, b[$ se vale $F'(x) = f(x)\ \forall x \in]a, b[$

Osservazione: Se F è la primitiva di f su]a,b[,
allora $H :]a, b[\to \mathbb{R},\ H(x) = F(x) + C$ è primitiva di $f\ \forall c \in \mathbb{R}$

Osservazione personale: Le primitive di una funzione f sono infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a F(x)+C, dove 'C' è un valore scalare

4.2 Proposizione:

siano F e G primitive di f su]a,b[. Allora

$$\exists k \in \mathbb{R}: \ F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in]a,b[$$

Dimostazione: usiamo H $:]a,b[\to \mathbb{R},\ H(x) = F(x) - G(x)$. Vale $H'(x) = 0 \forall x \in]a,b[$ e dunque H è costante su $]a,b[$

Osservazione: La proposizione è valida purché si lavori su un intervallo $]a,b[$

5 Funzioni integrali

5.1 Definizione

data $f:]a_0, a_0[\to \mathbb{R}$ continua e $c \in \mathbb{R}$
definiamo

$$\underbrace{I_c}_{(Funzione\ integrale\ di\ punto\ base\ c)} :]a_0, b_0[\to \mathbb{R},\ I_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

5.2 Proprietà di I_c

1. $I_c(c) = 0$
2. Dati $c_1, c_2 \in]a_0, b_0[$,

$$I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt \implies I_{c_1} - I_{c_2}\text{è costante}$$

5.3 Teorema fondametale del calcolo integrale

Sia f continua su $]a_0, b_0[$, sia $c \in]a_0, b_0[$
Allora $\forall x \in]a_0, b_0[\ vale\ I'_c(x) = f(x)$

Dimostazione: Bisogna trovare

$$\lim_{h\to 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$$

$\forall x \in]a_0, b_0[$ Guardiamo il limite destro;
dunque dobbiamo provare che $\forall h_n \to 0^+$

$$h_n > 0 \forall n \text{ vale } \frac{I_c(x+h_n) - I_c(x)}{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Si scrive

$$I_c(x+h_n) - I_c(x) = \int_c^{x+h_n} f - \int_c^x f = \int_x^{x+h_n} f(t)dt$$

Per teorema della media integrale

$$\exists c_n \in [x_1, x+h_n]\ t.c\ \frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} f(t)dt = f(c_n).$$

Poiché f è continua e $c_n \to x$, si ottiene $f(c_n) \to f(x)$. **qed**

5.4 Teorema fondametale del calcolo 2 o Formula di Torricelli

Se f è continua su $]a_0, b_0[$ e se F è primitiva di f su $]a_0, b_0[$ allora $\forall a, b \in]a_0, b_0[$ vale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dimostazione: Sia $c \in]a_0, b_0[$
I_c e F sono le primitive di f si $]a_0, b_0[$.
Per il teorema di caratterizzazione delle primitive

$$\exists k \in \mathbb{R}\ t.c\ F(x) = I_c(x) + k \forall x \in]a_0, b_0[$$

Dunque

$$F(b) - F(a) = I_c(b) + k - I_c(a) + k = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f(x)dx$$

qed