Derivate direzionali

Lez 9 (21/3/22) 1

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto, $f: A \to \mathbb{R}$
$(\bar{x},\bar{y}) \in A$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $|v| = 1$.
Definiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) \overset{(*)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f((\bar{x},\bar{y}) + t(v_1 v_2)) - f(\bar{x},\bar{y})}{t}$$

(derivata direzionale di f nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ e nella direzione v).

OSS 1 $v = e_1 = (1,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial e_1} = \frac{\partial f}{\partial x}$, la derivata parziale. Analogamente, se $v = e_2$ troviamo $\frac{\partial f}{\partial e_2}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})$.

OSS:2 Tornando alla definizione $(*)$, se scriviamo
$g(t) = f((\bar{x}\bar{y}) + t(v_1 v_2))$, definita $\forall\, t \in \mathbb{R}$ tale che $(\bar{x},\bar{y}) + t(v_1, v_2) \in A$, si vede che $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) = g'(0)$. Usando queste osservazioni si possono calcolare le derivate direzionali ~~sen~~ servendosi della definizione.

TEOREMA (formula del gradiente). Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(\bar{x},\bar{y}) \in A$, vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}\bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

$\forall\, v$ di norma unitaria.

Dim: con la formula di Taylor scriviamo

$$f((\bar{x}\bar{y}) + t(v_1 v_2)) - f(\bar{x},\bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), tv \rangle + o(|tv|)$$

Dividendo per t e mandando a 0

$$\lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla f(\bar{x}\bar{y}), tv \rangle + o(|tv|)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\langle \nabla f(\bar{x}\bar{y}), v \rangle + \frac{o(|tv|)}{t} \right)$$

$= \langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), v \rangle$, come volevamo.

Direzione di massima crescita

Data $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(\bar{x},\bar{y})$, cerchiamo la scelta di $v \in \mathbb{R}^2$ direzione unitaria che rende massima la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y})$

In altre parole, cerchiamo

$$\max_{\substack{|v|=1 \\ v \in \mathbb{R}^2}} \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) .$$

Essendo f differenziabile, usiamo la formula del gradiente. Assumiamo $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ (altrimenti $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ \forall v$)

Scriviamo in coordinate polari

$\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ con $r = |\nabla f(\bar{x},\bar{y})|$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$

$v = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Stiamo allora cercando

$$\max_{\theta \in [0,2\pi]} \langle r(\cos\varphi, \sin\varphi), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle$$

$$= \max_{\theta \in [0,2\pi]} r\cos(\varphi - \theta)$$

La scelta di θ che massimizza è dunque $\theta = \varphi$, che corrisponde a

$$v_{max} = \frac{\nabla f(\bar{x},\bar{y})}{|\nabla f(\bar{x},\bar{y})|} .$$

Dunque

$$\max_{|v|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial v_{max}}(\bar{x},\bar{y}) = \left\langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), \frac{\nabla f(\bar{x},\bar{y})}{|\nabla f(\bar{x},\bar{y})|} \right\rangle$$

$$= |\nabla f(\bar{x},\bar{y})|$$