Def (funzione convessa) $f: A \to \mathbb{R}$ 11/4/22

derivabile 1

$A \subseteq \mathbb{R}$. Dato $]a,b[\subseteq A$, si dice che f è convessa su $]a,b[$ se è derivabile in $]a,b[$ e se vale $f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in]a,b[$

Teorema. f derivabile in $]a,b[$. f è convessa su $]a,b[\iff f'$ è crescente su $]a,b[$.

Dim ($\Rightarrow$) Sia $x_1 < x_2$ con $a < x_1 < x_2 < b$.

Per la convessità vale

$$f(x_2) \geq \underline{f(x_1)} + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Vale anche (scambiando)

$$\underline{f(x_1)} \geq [f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)]$$

Unendo le due si trova

$$\cancel{f(x_2)} \geq [\cancel{f(x_2)} + f'(x_2)(x_1 - x_2)] + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

da cui $0 \geq [-f'(x_2) + f'(x_1)](x_2 - x_2)$ che, essendo $x_1 < x_2$, implica $f'(x_1) \leq f'(x_2)$

($\Leftarrow$) Usiamo Lagrange. Sia $x, \bar{x} \in]a,b[$, $x < \bar{x}$

~~Vale f(x)~~ Per Teorema di Lagrange $\exists \ c \in]x, \bar{x}[$ tale che $f(x) - f(\bar{x}) = f'(c)(x - \bar{x})$

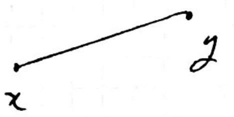
Dalla monotonia di f' si ha $f'(c) \leq f'(\bar{x})$.
Essendo $x - \bar{x} < 0$, si conclude che

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq f'(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Il caso $x > \bar{x}$ è analogo. (visto in classe)

Def (segmento in $\mathbb{R}^n$) Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo il segmento di estremi x, y come ogni

$$[x,y] := \{ x + t(y-x) : t \in [0,1] \} \subseteq \mathbb{R}^n$$



Definizione (Insieme convesso) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall\, x,y \in A$ risulta $[x,y] \subseteq A$

Definizione (Funzioni convesse (differenziabili)) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A convesso, A aperto. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile si dice convessa se vale $\forall\, \bar{x}, x \in A$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle$$

Formula di Taylor con resto secondo Lagrange.

21/4/22
16.1

Teorema Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, derivabile due volte ovunque, siano $\bar{x}, x \in]a,b[$.
Allora esiste $\theta \in]0,1[$ tale che
$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + f''(\bar{x}+\theta(x-\bar{x}))\frac{(x-\bar{x})^2}{2}$$

Dimostrazione. Siano x e $\bar{x} \in]a,b[$, $x \neq \bar{x}$.
Cerchiamo $k \in \mathbb{R}$ tale che
$$f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x-\bar{x}) - k\,(x-\bar{x})^2 = 0$$

Tale k esiste perché $x \neq \bar{x}$. Considero
$g:]a,b[\to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x) - f'(t)(x-t) - k\,(x-t)^2 - f(t)$
g è derivabile in $]a,b[$ e vale $g(x) = g(\bar{x}) = 0$
Per il teorema di Rolle $\exists\, \theta \in]0,1[$ tale che
~~g(t) = g~~ $g'(\bar{x}+\theta(x-\bar{x})) = 0$.
Calcoliamo $g'(t)$.
$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - k\,(t-x)^2\right]$$
$$= -f'(t) - \left[f''(t)(x-t) - f'(t)(-1)\right] - 2k\,(t-x)$$
$$= \left[-f''(t) + 2k\right](x-t)$$
Sappiamo che $g'(\bar{x}+\theta(x-\bar{x})) = 0$
$$\Rightarrow \left[-f''(\bar{x}+\theta(x-\bar{x})) + 2k\right]\underbrace{\left(x - [\bar{x}+\theta(x-\bar{x})]\right)}_{\neq 0 \text{ (perché } \theta \in]0,1[)} = 0$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{2} f''(\bar{x}+\theta(x-\bar{x}))$$
come richiesto

Nota: tutto si generalizza all'ordine n
$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(\bar{x})\frac{(x-\bar{x})^k}{k!} + f^{(n)}(\bar{x}+\theta(x-\bar{x}))\frac{(x-\bar{x})^n}{n!}$$

Caso n- dimensionale

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Siano $\bar{x}$ e $\bar{x}+h \in A$ e tali che $[\bar{x}, \bar{x}+h] := \{\bar{x}+th \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$. Allora $\exists\ \theta \in]0,1[$ tale che

$$f(\bar{x}+h) \underset{(*)}{=} f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\bar{x}+\theta h)h, h \rangle$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(t) = f(\bar{x}+th)$, di classe C^2 su $[0,1]$ e osserviamo che $g'(t) = \langle \nabla f(\bar{x}+th), h \rangle$ e $g''(t) = \langle Hf(\bar{x}+th)h, h \rangle$. Usiamo Taylor di ordine 2. $\exists\ \theta \in]0,1[$ tale che

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta).$$

Trascrivendo in termini di f otteniamo la formula $(*)$.

Teorema (caratterizzazione delle funzioni convesse C^2) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 ($\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ continue su A $\forall\ j,k = 1,\dots,n$). Allora f è convessa [concava] su $A \iff Hf(x) \geq 0$ $[Hf(x) \leq 0]$ $\forall\ x \in A$

[Ricordiamo che $A = A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice semidefinita positiva $(A \geq 0)$ se vale $\langle Ah, h \rangle \geq 0\ \forall\ h \in \mathbb{R}^n$]

Dimostrazione ($\Leftarrow$) Dati $x, \bar{x} \in A$, scriviamo Taylor di ordine 2. $\exists\ \theta \in]0,1[$ tale che

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), (x-\bar{x}) \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\bar{x}+\theta(x-\bar{x}))(x-\bar{x}), (x-\bar{x}) \rangle$$

$$\geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle$$

usata ipotesi $Hf(\bar{x}+\theta(x-\bar{x})) \geq 0$

[$\Rightarrow$] Per ipotesi f è convessa.
Sia $\bar{x} \in A$. Dimostriamo che $Hf(\bar{x}) \geq 0$
Per fare ciò, è sufficiente, dato $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $\bar{x}+h \in A$, scrivere la formula di Taylor per punti $x_k \doteq \bar{x} + \frac{1}{k} h$, con $k \in \mathbb{N}$
($x_k \in A \ \forall k \in \mathbb{N}$, perché A è convesso)

$\exists\, \theta_k \in]0,1[$ tale che

$$f\left(\bar{x}+\frac{h}{k}\right) = f(\bar{x}) + \left\langle \nabla f(\bar{x}), \frac{h}{k} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle Hf\left(\bar{x}+\theta_k \frac{h}{k}\right)\frac{h}{k}, \frac{h}{k}\right\rangle$$

Dalla convessità si ottiene

$$\left\langle Hf\left(\bar{x}+\theta_k \frac{h}{k}\right)\frac{h}{k}, \frac{h}{k}\right\rangle \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow \left\langle Hf\left(\bar{x}+\theta_k \frac{h}{k}\right) h, h\right\rangle \geq 0 \quad \forall k$$

$\Longrightarrow$ (per continuità di Hf, visto che $x_k \to \bar{x}$)

$$\langle Hf(\bar{x})h, h\rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \bar{x}+h \in A$$

La tesi segue dal fatto che A è aperto.

ESEMPI: Polinomi di grado 2

ESERCIZIO: Verificare che $f(x,y) = x^2 e^y + 2y^2 + x - 2y$ è convessa nel disco $B((0,0),1) \subseteq \mathbb{R}^2$