ES. svolti. 1 (28/3)

(1) È data $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile ovunque. Sapendo che $\nabla f(x,y) = (y^2 e^{xy}, (1+xy) e^{xy})$, calcolare la derivata $\frac{d}{dt} f(\sin t, t^2)$

(2) Data $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, poniamo $H:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(t,s) = f(ts^2, te^{-s})$. Calcolare $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial s} H$

Matrici Jacobiane (cenni)

Data $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ differenziabile, introduciamo $\forall x \in \mathbb{R}^n$ la matrice

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_p(x) & & \partial_n f_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

Si dimostra, generalizzando la formula per la derivata lungo una curva, che, date $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, entrambe differenziabili ovunque, la matrice jacobiana di $g\circ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ è data da

$$\underbrace{J_{g\circ f}(x)}_{q\times n} = \underbrace{J_g(f(x))}_{q\times p}\, \underbrace{J_f(x)}_{p\times n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Definizione (Punti di massimo/minimo) Data $f:A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $\bar{x} \in A$ si dice di minimo (massimo) locale se $\exists \delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap B(\bar{x},\delta) \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x})$$
$$(\leq)$$

Teorema (di Fermat). Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ ha un minimo (o massimo) locale in $\bar{x} \in A$ e $\exists\ \partial_1 f(\bar{x}), \dots, \partial_n f(\bar{x})$, allora

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \longrightarrow \boxed{\text{Si dice che } \bar{x} \text{ è stazionario, o critico}}$$

Dim: Suppongo $\bar{x}$ di minimo. Considero per t in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$, ~~la funzione~~ e $j \in \{1, \dots, n\}$. La funzione

$$g_j(t) = f(\bar{x} + t e_j)$$

(qui $e_j = (0, 0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0).$)

Risulta che g_j ha un minimo locale per $t = 0$.

Inoltre, per definizione di derivata parziale $\exists\ g_j'(0)$ e vale $g_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$. Quindi $\partial_j f(\bar{x}) = 0$.

Def (matrice hessiana). Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, data $f: A \to \mathbb{R}$, supponiamo $\exists\ \partial_j f(x)$ $\forall x \in A$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Poniamo allora (qualora i limiti esistano)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \quad \forall j, k \in \{1, \dots, n\} \quad j \neq k.$$

e definiamo

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \\ & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

Teorema (Schwarz) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$. Assumiamo che $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ siano continue. Allora $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x \in A$ risulta
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$$

($n=2$)

Dim. Sia f come da ipotesi e sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$. Poiché A è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che la funzione $g:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$,
$$g(h) = f(\bar{x}+h, \bar{y}+h) + f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}+h) - f(\bar{x}+h, \bar{y})$$
è ~~ben~~ definita.

Per $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ consideriamo
$$u(t) = f(\bar{x}+t, \bar{y}+h) + f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}+h) - f(\bar{x}+t, \bar{y})$$
Per definizione di derivata parziale, u è derivabile e vale $u'(t) = \partial_x f(\bar{x}+t, \bar{y}+h) - \partial_x f(\bar{x}+t, \bar{y})$.

Applicando il teorema di Lagrange ad u sull'intervallo di estremi 0 e h troviamo che $\exists\, \theta_1 \in]0,1[$: $u(h) - u(0) = u'(\theta_1 h) h$. Equivalentemente
$$g(h) = u(h) - u(0) = u'(\theta_1 h) h =$$
$$= [\partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y}+h) - \partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y})] h$$
~~Così~~ (Abbiamo usato la definizione di derivata parziale. Per scrivere la parentesi quadra usiamo la continuità di $\partial_y \partial_x f$ e ancora Lagrange per $v(t) = \partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y}+t)$ su $[0, h]$ (o $[h, 0]$)

Si trova che $\exists\, \theta_2 \in]0,1[$ tale che
$$v(h) - v(0) = v'(\theta_2 h) h = \partial_y \partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y}+\theta_2 h) h$$
(Def di derivata parziale

Di conseguenza avremo

$$g(h) = [v(h) - v(0)]\,h = \partial_y \partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y}+\theta_2 h)\, h^2$$

e, passando al limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h^2} = \partial_y \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) = (\circ)$$

↳ (Continuità di $\partial_y \partial_x f$)

Per avere informazioni sull'altra derivata $\partial_x \partial_y f$, ricominciamo da capo con

$$w(t) = f(\bar{x}+h, \bar{y}+t) + f(\bar{x},\bar{y}) - f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}+t)$$

e ripetiamo tutto il ragionamento. Si trova che $\exists\, \theta_3, \theta_4 \in\,]0,1[$ tali che

$$g(h) = \partial_x \partial_y f(\bar{x}+\theta_3 h, \bar{y}+\theta_4 h)\cdot h^2$$

e, andando al limite, $\dfrac{g(h)}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \partial_x \partial_y f(\bar{x},\bar{y}) = (\circ\circ)$

Dunque $(\circ) = (\circ\circ)$, per l'unicità del limite. #

FORME QUADRATICHE

Def Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^t$, poniamo $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q_A(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, h_k h_j =$$

$$= \cancel{\sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} 2a_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} a_{jk} h_j h_k .$$

$\boxed{q_A = \text{forma quadratica associata ad } A}$

ESEMPI VARI visti in classe (casi diagonali)

Definizione (forme quadratiche/matrici positive, negative o indefinite) Data $A = A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dico che

(1) $A > 0$, se $\langle Ah, h\rangle > 0 \quad \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

(2) $A < 0$, se $\langle Ah, h\rangle < 0 \quad \forall h \neq 0$

(3) A è indefinita, se $\exists\, h^-, h^+ \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\langle Ah^-, h^-\rangle \underset{\neq}{<} 0 \underset{\neq}{<} \langle Ah^+, h^+\rangle .$$